Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Herná sémantika funkcionálneho jazyka na báze výpočtových arén

Diplomová práca

2016

Bc. Katarína Sirotská

Technická univerzita v Košiciach
Fakulta elektrotechniky a informatiky

Herná sémantika funkcionálneho jazyka na báze výpočtových arén

Diplomová práca

Študijný program:	Informatika
Študijný odbor:	Informatika
Školiace pracovisko:	Katedra počítačov a informatiky (KPI)
Školiteľ:	prof. RNDr. Valerie Novitzká, PhD.
Konzultant:	prof. RNDr. Valerie Novitzká, PhD.

Košice 2016 **Bc. Katarína Sirotská**

Abstrakt v SJ

Objektom skúmania tejto diplomovej práce je herná sémantika a jej princípy, ktoré sú po dôkladnej analýze aplikované do praktického riešenia. Cieľom tejto diplomovej práce je aplikovať hernú sémantiku na riešenie výpočtu vo funkcionálnom jazyku a dokázať tak, že herná sémantika predstavuje riešenie ekvivalentné spojeniu operačnej a denotačnej sémantiky. Práca je rozdelená do niekoľkých kapitol. Medzi ne je zahrnutá analýza existujúcich zdrojov z oblasti hernej sémantiky a analýza λ-kalkulu ako univerzálneho zápisu pre funkcionálny jazyk. Ďalej práca obsahuje návrh riešenia zahŕňajúci tvorbu herného stromu, konštrukciu výpočtovej arény a kategórie. V závere práce je návrh riešenia ilustrovaný na konkrétnych príkladoch.

Kľúčové slová

herná sémantika, funkcionálny jazyk, výpočtové arény, kategórie, herný strom

Abstrakt v AJ

The main object of investigation in this diploma thesis is game semantics and its principles which are applied into the practical solution after detailed analysis. The aim of this diploma thesis is to apply the game semantics to the solution of computation in functional language and to prove that game semantics is equivalent solution to the connection of operational and denotational semantics. This diploma thesis is divided into several chapters. There is analysis of existing sources from game semantics area and analysis of lambda calculi as the general writing for functional language included. This diploma thesis also contains solution design including creation of game tree, construction of computing arena and category. At the end of this diploma thesis, there is solution design illustrated in the concrete examples.

Kľúčové slová v AJ

game semantics, functional language, computing arenas, categories, game tree

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY

Katedra počítačov a informatiky

ZADANIE DIPLOMOVEJ PRÁCE

Študijný odbor: **9.2.1 Informatika**

Študijný program: **Informatika**

Názov práce:

Herná sémantika funkcionálneho jazyka na báze výpočtových arén

Game Semantics of Functional Language on the Base of Computational Arenas

Študent: **Bc. Katarína Sirotská**

Školiteľ: **prof. RNDr. Valerie Novitzká, PhD.**

Školiace pracovisko: **Katedra počítačov a informatiky**

Konzultant práce:

Pracovisko konzultanta:

Pokyny na vypracovanie diplomovej práce:

1. Preštudovať a spracovať princípy hernej sémantiky a typovaného lambda kalkulu
2. Konštruovať kategóriu výpočtových arén pre modelovanie výpočtov typovaných termov
3. Ilustrovať navrhnuté riešenie na vhodných príkladoch
4. Vypracovať dokumentáciu podľa pokynov vedúceho práce

Jazyk, v ktorom sa práca vypracuje: slovenský

Termín pre odovzdanie práce: 29.04.2016

Dátum zadania diplomovej práce: 31.10.2015

Jaroslav Porubän

doc. Ing. Jaroslav Porubän, PhD.
vedúci garantujúceho pracoviska

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH FAKULTA ELEKTROTECHNIKY A INFORMATIKY -10-

v. z.

prof. Ing. Liberios Vokorokos, PhD.
dekan fakulty

Čestné vyhlásenie

Vyhlasujem, že som diplomovú prácu vypracovala samostatne s použitím uvedenej odbornej literatúry.

Košice 29. 4. 2016 ....

Vlastnoručný podpis

Poďakovanie

Ďakujem vedúcej diplomovej práce, pani prof. RNDr. Valerii Novitzkej, PhD. za odborné vedenie, cenné rady a pomoc pri vypracovaní diplomovej práce.

Predhovor

Predkladaná diplomová práca sa venuje problematike hernej sémantiky vo funkcionálnom jazyku. Vytvára riešenie pre interpretáciu výpočtu vo funkcionálnom jazyku na báze výpočtových arén, ktoré sú v závere objektom pre konštrukciu kategórie. Pomerne vysoká aktuálnosť tejto témy bola hlavným dôvodom výberu témy pre túto diplomovú prácu.

Obsah

Zoznam obrázkov

Zoznam symbolov a skratiek

PCF Programming Computable Functions

B, W označenie bielych a čiernych figúriek na šachovniciach z anglického black (B) a white (W)

A určitý výraz v logike

a, b ťahy v hre

Γ typový kontext

@ koreň herného stromu

V je množina všetkých uzlov v hernom strome

P, O P z anglického player alebo proponent, teda hráč a O z anglického oponent, teda protihráč

$Q_n(A)$ množina opytovacích ťahov (otázok)

$Ans(A)$ množina všetkých odpovedí

A_1, A_2, A_3, ..., A_n výpočtové arény

t lambda-term

T typ termu

$proj_1, proj_2$ projekcie

$\mathscr{A}, \mathscr{B}, \mathscr{C}, \mathscr{D}, \mathscr{E}, \mathscr{F}, \mathscr{G}, \mathscr{H}$ kategórie

Úvod

Témou tejto diplomovej práce je herná sémantika v programovacích jazykom v prvom rade. Je to bližšia oblasť skúmania matematiky a teoretickej informatiky, ktorá postupne prechádza do praxe, ktorá sa zaoberá paradigmou funkcionálneho programovania. Táto téma je v súčasnej dobe aktuálna a analyzovaná v rôznych vedných oblastiach, nielen v informatike. Aktuálnosť tejto témy je jeden z mnohých dôvodov môjho výberu témy diplomovej práce. Na základe absolvovaných predmetov počas štúdia som mala možnosť rozšíriť svoje znalosti v týchto oblastiach prostredníctvom predmetov Teoretická informatika, Sémantika v programovacích jazykoch, Teória typov, Logika pre informatikov a Funkcionálne programovanie. Motiváciou k tejto práci bolo najmä skĺbenie týchto znalostí do jedného súvislého celku, ktoré táto práca odzrkadľuje. Paradigma funkcionálneho programovania vzbudzuje čoraz väčší záujem u mnohých vedcov zaoberajúcich sa matematikou a logikou. V spojení v teóriou hier, ktorá nie je z krátkodobého hľadiska žiadnou novinkou v akejkoľvek oblasti vo svete, vytvárajú základný podklad tejto práce.

Cieľom tejto diplomovej práce je uloženie praktického základu pre hernú sémantiku, ktorá by sa časom mohla zaradiť medzi ostatné smery sémantiky v programovacích jazykoch v rámci výuky na Fakulte elektrotechniky a informatiky. Ide o riešenie pre interpretáciu programu písaného vo funkcionálnom programovacom jazyku pomocou výpočtovej arény, ktorá bude zobrazená v kategórii.

V tejto práci budú použité mnohé metódy pre rôzne fázy riešenia problému. Ide o metódy konštrukcie herného stromu, neskôr transformácia herných stromov do výpočtovej arény a na záver konštrukcia kategórie, v ktorej bude intrepretovaný celý priebeh výpočtu medzi jednotlivými výpočtovými arénami.

Táto práca je rozdelená na niekoľko kapitol. Prvá kapitola obsahuje krátku formuláciu úlohy pre túto diplomovú prácu, kde v bodoch vidíme postupnosť jednotlivých častí. Druhá kapitola je venovaná princípom teórie hier, hernej sémantiky a analýze jednotlivých prístupov k hernej sémantike a v závere tejto kapitole je porovnanie prístupov. Tretia kapitola je venovaná analýze λ-kalkulu, ktorý je použitý ako univerzálny zápis pre funkcionálny programovací jazyk. Ďalej nasleduje analýza kategórií, ktoré sú použité v závere praktickej časti práce ako prostriedok pre interpretáciu výpočtu, teda priebehu programu. Kapitola 5 inicializuje praktickú časť tejto diplomovej práce, nakoľko jej obsah je venovaný konštrukcii herného stromu. Ďalšia kapitola vychádza z kapitoly 5 a transformuje herné stromy do výpočtovej arény. Kapitola 7 je venovaná ilustrácii navrhnutého riešenia na konkrétnych príkladoch, teda obsahuje konštrukciu kategórie, ktorý interpretuje výpočet, teda beh programu.

1 Formulácia úlohy

Riešenie pre túto diplomovú prácu je formulované v nasledujúcich bodoch:

1. Preštudovať a spracovať princípy hernej sémantiky a typovaného lambda kalkulu.
2. Konštruovať kategóriu výpočtových arén pre modelovanie výpočtov typovaných termov.
3. Ilustrovať navrhnuté riešenie na vhodných príkladoch.
4. Vypracovať dokumentáciu podľa pokynov vedúceho práce.

2 Princípy teórie hier a hernej sémantiky

Herná sémantika je interpretácia jazyka, ktorá je založená na teórii hier. Na začiatok objasníme pojem teórie hier. Na vypracovanie tejto kapitoly sú použité zdroje [27], [28]. Podľa zdroja [7] z historického hľadiska sa teória hier začala skúmať a vyvíjať od začiatku 20. storočia. V tejto práci sa však budeme venovať vývoju teórie hier približne od 70. rokov. V tomto období sme mohli zachytiť vysokú úroveň záujmu o teóriu hier, najmä v oblasti *ekonomiky* a *politiky*. Aplikácia modelov teórie hier na rôzne ekonomické modely bola predzvesťou vývoja rôznych variánt pomocou zjemnenia základného ponímania teórie hier. Teória hier bola zaujímavá aj pre iné vedné disciplíny. Zväčša ide o prírodné vedy ako je biológia, teoretická informatika, ale aj filozofia a sociológia. Vznikali mnohé časopisy na podporu teórie hier, organizovali sa mnohé medzinárodné konferencie, ktoré navštevovalo čoraz viac výskumníkov. Teória hier sa stala predmetom výskumu na mnohých miestach sveta, kde vznikali centrá výskumu. Medzi tieto krajiny patrila značná časť Európy, najmä Francúzsko, Holandsko, Anglicko, ale zapojilo sa aj Japonsko, India a mnohé univerzity Spojených štátov.

Teória hier je použiteľná aj na pravdepodobnostných príkladoch ako je problém náhody. S náhodou sa stretávame v bežnom živote, ale pre porovnanie s teóriou hier je vhodným príkladom hod mincou, ktorej výsledok v princípe tejto teórie môže rozhodnúť o nasledujúcej akcii. Samozrejme tento príklad nie je aplikovateľný v oblasti ekonomiky, politiky a podobne, nakoľko nie je akceptovateľné to, aby dôležité rozhodnutia boli uskutočnené na základe hodu mincou. Napriek uvedenému vieme nájsť pre náhodu miesto aj vo vedeckom výskume. V teórii hier je dôležité, že pri hode mincou protihráč nevie predpokladať nasledujúcu akciu hráča. Táto metóda sa nazýva fáza nerozhodnuteľnosti.

V oblasti ekonomiky v analýze ekonomických modelov sú vhodné stratégie rovnováhy. Avšak každá strategická rovnováha v ekonomike bola považovaná za príliš striktnú.

Teoretická informatika je tiež jednou z oblastí, kde je teória hier využívaná. Najmä v distribuovaných výpočtoch, kde jednotlivé jednotky distribuovaného systému sú hráči podľa teórie hier, títo musia navzájom komunikovať.

Posledným a najzaujímavejším pohľadom na teóriu hier je otázka vyhradenia ceny pre obe strany hráča a protihráča. Táto otázka je vhodne ilustrovateľná na konkrétnych príkladoch. Napríklad cena hovorov vrámci určitej organizácie alebo pristávanie lietadiel na letisku, kde si pod hráčom predstavíme jedno pristátie jedného lietadla. V prípade letiska, cena nezávisí len od množstva pristátí, ale záleží na kompozícii viacerých aspektov, ktoré tvoria jeden celok. Berieme do úvahy, že každé lietadlo má na pristávanie rôzne kritériá, čo do dĺžky pristávacej dráhy, času potrebného na pristátie a podobne.

V závere je možné o teórii hier povedať, že je eticky neutrálna. Teória hier nám neukazuje správnu a jednoznačnú cestu k výsledku. Popisuje, aké dôsledky majú jednotlivé možnosti voľby. Nie je možné obviňovať teóriu hier z toho, že nám ponúka napríklad nesprávnu ekonomickú stratégiu, nakoľko nato by nám slúžiť nemala.

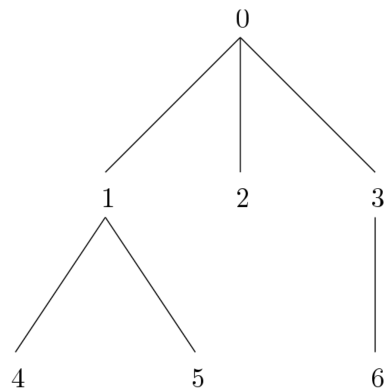
2.1 Princípy hernej sémantiky

Podľa zdroja [1] princípom hernej sémantiky je problém rozhodnuteľnosti za sebou nasledujúcich akcii v prípade dvoch hráčov. Ide teda výhradne o hry dvoch hráčov, ktoré dôverne poznáme, a to napríklad šach, bridž a podobne. Cieľom je nasledovať a vykonať takú postupnosť ťahov, ktorá bude pre hráča víťazná. Existuje mnoho prístupov k hernej sémantike a postupom času sa vytvorili dva hlavné tábory vedcov, ktorí spoločne rozvíjajú hernú sémantiku. Na čele jednej z týchto skupín je Samson Abramsky, na strane druhej je Martin Hyland. Oba prístupy boli pre túto prácu preštudované a budeme sa im venovať v nasledujúcich kapitolách. Ako už bolo vyššie popísané, teória hier sa v mnohých odvetviach stala základom pre tvorbu modelov. Herná sémantika im pridáva význam. Hernú sémantiku považujeme za riešenie, ktoré kombinuje operačnú a denotačnú sémantiku, teda výsledkom aplikácie hernej sémantiky na term (výraz) je jeho denotácia, teda všeobecný predpis, ale aj výsledok programu, teda hodnota, čo je cieľom operačnej sémantiky podľa [29] a [30]. Rozdielom hernej a operačnej sémantiky je, že herná sémantika sa viaže na všetky prípady, teda vznikajú paralelne vyhodnocujúce sa vetvy v strome. Na začiatok sa oboznámime so základnou terminológiou v hernej sémantike a neskôr si priblížime postup tvorby a vyhodnotenia stromu rôznymi spôsobmi.

2.1.1 Základné pojmy hernej sémantiky

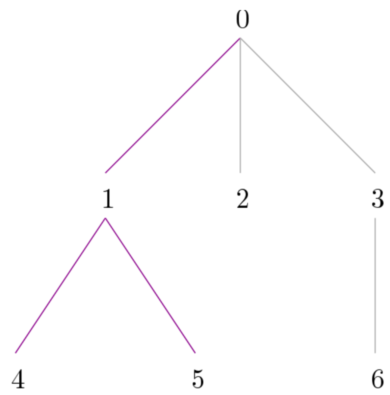
V tejto kapitole sú uvedené základné pojmy pre porozumenie princípov hernej sémantiky a pre pochopenie navrhnutého riešenia tejto diplomovej práce. Na vypracovanie tejto kapitoly boli použité zdroje [1][2][5][8][9][11][14] a [12].

- hra - hra je množina herných stromov,



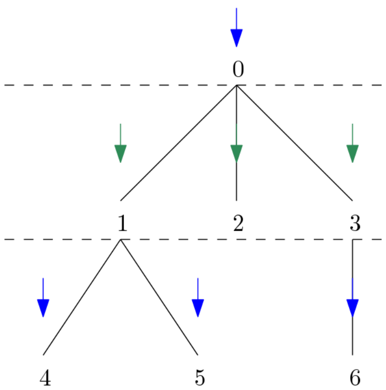
Obr. 2 – 1: Hra

- herný strom - matematická štruktúra, ktorá má charakter výpočtového stromu, na nasledujúcom obrázku je herný strom vyznačený fialovou farbou,



Obr. 2 – 2: Herný strom

- hráč - subjekt, ktorý reprezentuje vždy jednu úroveň v štruktúre herného stromu, v zmysle hernej sémantiky je hráč ten, ktorý vykonáva akcie a iniciuje nasledujúce, na obrázku je akcia protihráča vyznačená modrou a akcia hráča zelenou farbou,



Obr. 2 – 3: Hráči v hernom strome

- akcia - proces spracovania vstupu na výstup,
- otázka a odpoveď - otázka je taký ťah zo sekvencie, ktorý požaduje informáciu a odpoveď je ťah, ktorý informáciu poskytne na základe otázky,
- legálny ťah - za legálny ťah považujeme taký ťah, ktorý je v rámci hry štandardnou akciou medzi aktuálnym a nasledujúcim ťahom,
- víťazný ťah - výsledný ťah je víťazným ťahom herného stromu, práve vtedy keď hra je konečná a ak je hra nekonečná, potom neobsahuje víťazný ťah,

- posledný ťah - ťah, ktorý nemá nasledovníka,
- hranica - za hranicu považujeme pomyselnú medzeru medzi dvomi prostrediami, ktoré majú medzi sebou určitú interakciu,
- interakcia - striedanie komunikácie medzi hráčmi cez hranicu,
- stratégia - vopred určený postup interakcie medzi hráčmi,
- víťazná stratégia - ak na základe celej stratégie vykoná hráč posledný ťah, môžeme túto stratégiu považovať za víťaznú,
- arény - množina herných stromov, resp. les herných stromov, ktorý združuje herné stromy pre termy rovnakého typu,
- determinizmus - vlastnosť, ktorá je viditeľná počas výpočtu, a to tak, že ak je v každom kroku výpočtu vieme predvídať nasledujúci krok, potom môžeme výpočet považovať za deterministický.

Tieto pojmy budú použité neskôr v nasledujúcich kapitolách, ktoré budú venované konštrukcii herného stromu. Táto konštrukcia je rôzne poňatá podľa prístupu, ktorý bol použitý v zdrojoch tejto diplomovej práce. Jednotlivé prístupy boli pre túto prácu analyzované a v nasledujúcich podkapitolách sú bližšie popísané.

2.2 Analýza jednotlivých prístupov k hernej sémantike

Samson Abramsky zaviedol niekoľko základných pojmov v rámci hernej sémantiky a svoj prístup k nim, taktiež definoval vzťah dvoch hráčov ako ekvivalent vzťahu systému a prostredia. Táto odlišnosť a jasne daná úloha oboch strán je jednou zo základných vlastností jeho prístupu k hernej sémantiky. Rozdiel medzi systémom a prostredím nám umožňuje použitie matematických štruktúr a taktiež podáva dobrý základ pre širokú škálu funkcionálnych jazykov. Všetky akcie vykonané systémom sú pod jeho kontrolou, naopak všetky akcie vykonané prostredím nie sú pod kontrolou systému. Každá akcia vzniká ako reakcia na predošlú akciu. Avšak, je potrebné sa zamyslieť nad tým, ktorá strana má vykonať prvý ťah. K tomu sa však dostaneme neskôr. Medzi systém a prostredie vieme zadať pomyselnú hranicu. Cez túto hranicu prebieha celá interakcia. Správanie sa systému definujeme ako jeho interakciu s prostredím cez hranicu.

Z hľadiska hier sú systém a prostredie považované za hráčov. Charakteristická je tiež zámena úloh systému a prostredia. To znamená, že prostredie môže vykonávať pozíciu systému a naopak, teda pozícia hráča a protihráča sú rovnocenné a môžu sa aj vymeniť.

Tak ako v každom výpočte, aj vo výpočtoch termov v hernej sémantike je dôležitá úloha determinizmu. Determinizmus výpočtu sa prejavuje tak, že výpočet obsahuje vopred dané kroky. Vieme povedať, že hra sa môže v kontexte výpočtového stromu ľubovoľne vetviť. Strana systému sa správa deterministicky, pričom strana prostredia sa správa nedeterministicky. Stratégia však ostáva deterministickou.

Interakciu môžeme chápať ako protistranné stratégie systému a prostredia. Každá z týchto strán má vlastnú stratégiu. Zatiaľ čo stratégia prostredia sa vetví ľubovoľne a je nepredvídateľná, stratégia systému je rekaciou na prostredie a je presne daná.

2.2.1 Analýza Abramskeho prístupu k hernej sémantike

Abramsky v zdrojoch [1], [4], [6] a [14] vyzdvihuje hlavné vlastnosti hernej sémantiky, ktoré v značnej miere ovplyvňujú každý nasledujúci vývoj. Herná sémentika má podľa neho význam nielen v sémantike programovacích jazykov, ale aj v logike. V logike je to spôsob reprezentácie modelu a spôsob tvorby dôkazu. Medzi vlastnosti hernej sémantiky patria nasledujúce:

- schopnosť kompozície stratégií,
- nezávislosť na syntaxi,

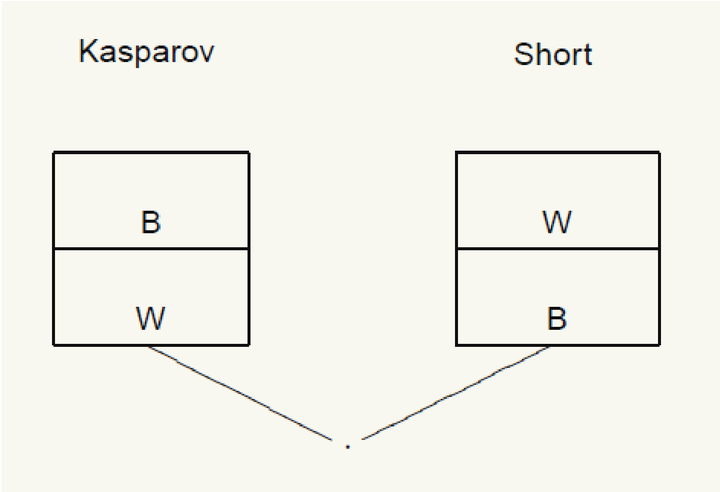
- úroveň abstrakcie a úplnosti stratégií.

Podľa zdroja [4] sa kompozícia stratégií prejavuje v schopnosti dvoch stratégií, ktoré sú vykonateľné v jednom hernom strome, dopĺňať sa navzájom. Presnejšie, jedna stratégia dokáže v určitej miere ovplyvniť časť inej stratégie. Výhody kompozície stratégií sa v hernej sémantike prejavujú aj pri priradzovaní významu, či už hrám priradzujeme typy alebo stratégiám termy. Kompozícia stratégií teda naozaj patrí k elementárnym podmienkam správne formulovanej hernej sémantiky. Ďalšiu vlastnosť, a teda syntaktickú nezávislosť dosiahneme použitím matematickej štruktúry, teda pomocou kategórie. Úplnosť stratégie zabezpečíme dodržiavaním podmienok pri konštrukcii kategórie, zároveň tým zvýšime úroveň abstrakcie.

Abramsky použil procesný kalkul pri výpočtoch, ktorý pôvodne nie je typovaný. Vývojom jeho typového systému sa ako typy používajú super-štruktúry. Ak uvažujeme hru dvoch hráčov, ktorí na základe stratégie vykonávajú ťahy, môžeme povedať, že akcia hráča je vykonaná ako reakcia protihráča, ktorá sa môže ďalej vetviť. hovoríme o štruktúre herného stromu, ktorú podrobne popíšeme neskôr.

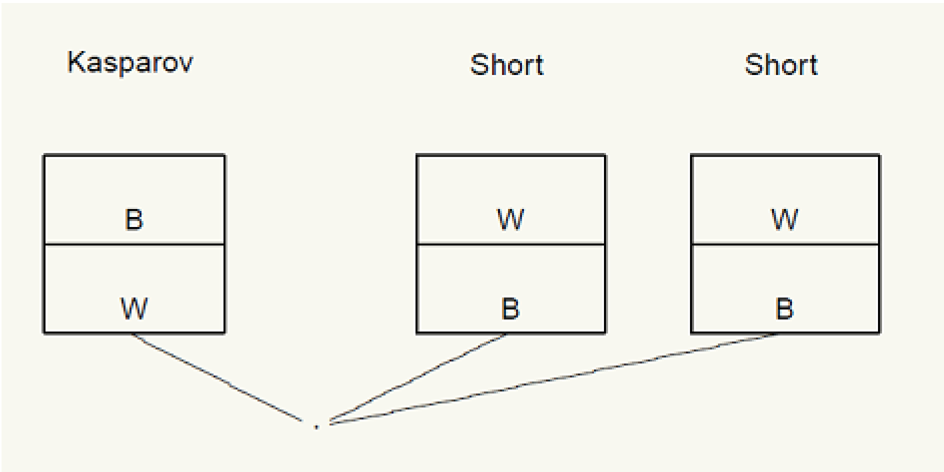
V Abramského prednáške [4] je spomenutá aj nevyhnutná prítomnosť a použitie určitej matematickej štruktúry, ktorá by slúžila na popis termu a jeho vyhodnotenie pomocou tzv. matematického jazyka. Správnou matematickou štruktúrou je kategória vychádzajúca z teórie kategórií. Výhodu a ukážku nezávislosti na syntaxi ukázal Abramsky na príkladoch rôznych iných kategórií. Napríklad karteziánska uzavretá kategória, lineárna kategória a pod. Hovoríme, že hry a stratégie sú organizované do kategórií. Hlavným zámerom Abramského prístupu je sústrediť sa na štrukturálne vlastnosti hernej sémantiky. Výskum je nasmerovaný na kategórie. Abramsky dáva prednosť rovnováhe hernej sémantiky pomocou logiky cez kategórie skôr, než sa zaoberať výskumom víťazných stratégií. Udržiava medzi týmito dvomi otázkami určitú rovnováhu.

Pre Abramskeho prístup je známy aj príklad z reálneho života, ktorý použil na priblíženie podstaty hernej sémantiky. Je to hra, ktorá nám má prezradiť ako vyhrať partiu šachu nad medzinárodným šachovým majstrom Kasparovom.



Obr. 2 – 4: Ilustrácia šachu s dvomi hracími plochami, zdroj: [1]

Na nasledujúcom obrázku sú znázornené dve hracie plochy. Na ľavej strane hrá Kasparov s čiernymi figúrkami, označenými ako B (z anglického black) a na pravej strane hrá Short s bielymi figúrkami, označenými ako W (z anglického white). Na tomto príklade Abramsky ukazuje, prečo sa herná sémantika interpretuje ako hra práve dvoch hráčov. Ilustruje to aj nasledujúci obrázok.

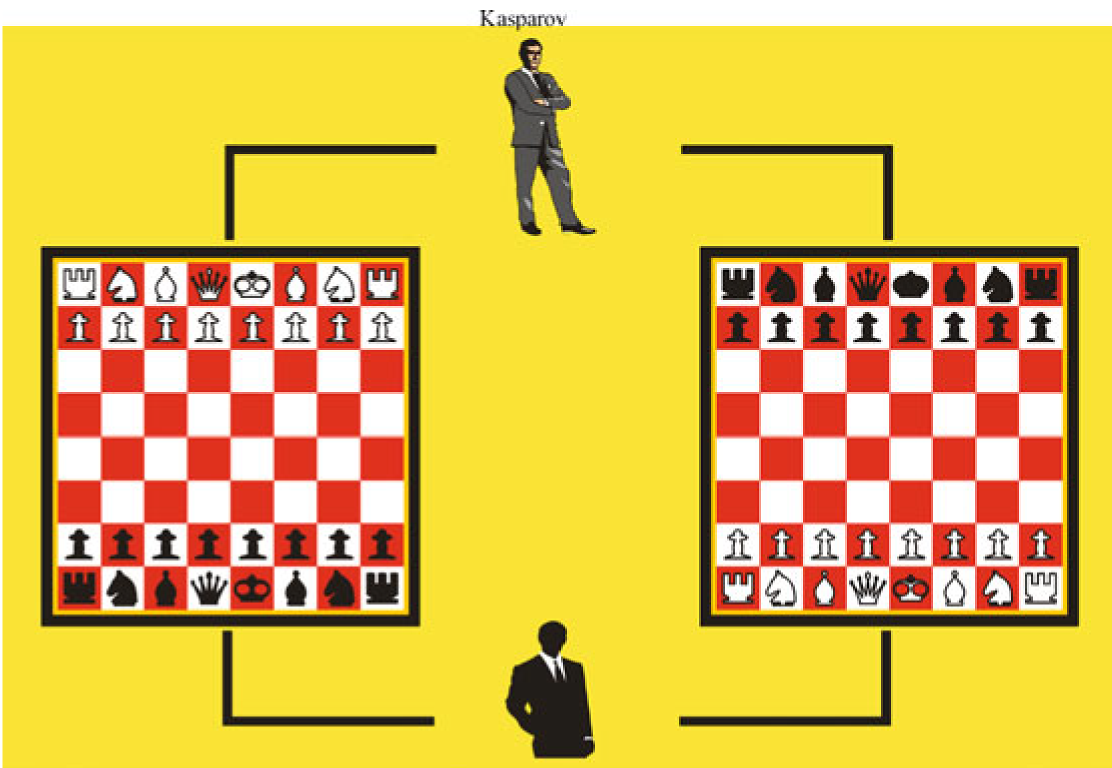


Obr. 2 – 5: Ilustrácia šachu s tromi hracími plochami, zdroj: [1]

Problém nastane v okamihu, keď po Kasparovovom úvodnom ťahu má hráč Short reagovať. Dve rozdielne Shortove hracie plochy môžu spôsobiť dve rôzne odpovede. Preto sa takýmto zložitým prípadom nezaoberáme. Hra by bola mätúca hneď na začiatku, kedže Kasparov môže začať dvomi rôznymi počiatočnými ťahmi. Zložené hry sú spájané pomocou paralelnej kompozície.

Stratégia Copy-cat

Abramsky sa vo svojej práci zameriaval na stratégiu copy-cat. Prezentuje pomocou nej vlastnosť dynamiky, presnejšie považuje túto stratégiu za dynamickú verziu tautológie $A \vee \neg A$. Copy-cat stratégia je ilustrovaná na obrázku. Princíp tejto stratégie je v kopírovaní. Protihráč vyšle akciu hráčovi a ten odošle ako reakciu to isté. Táto stratégia je znázornená na nasledujúcom obrázku.



The copy-cat strategy

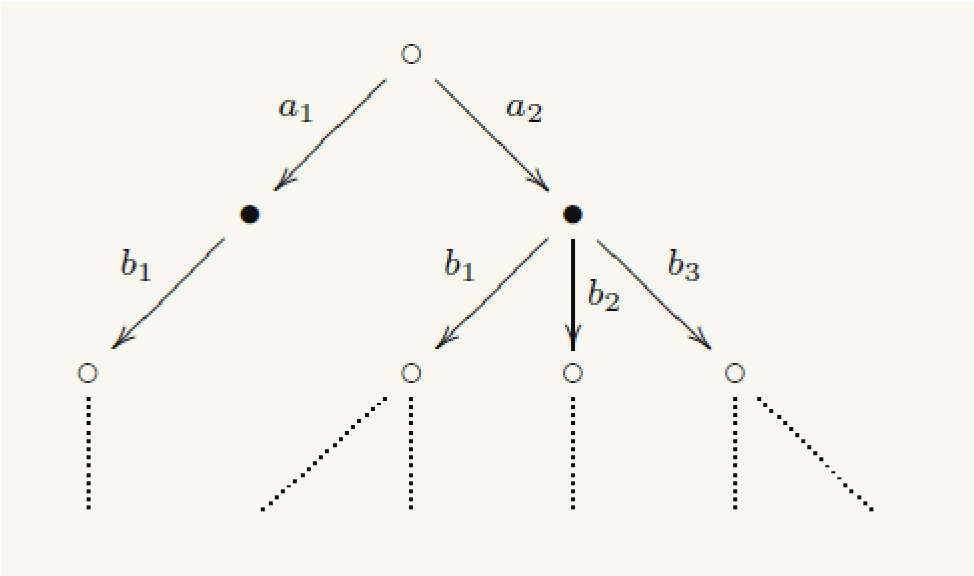
Obr. 2 – 6: Ilustrácia stratégie Copy-cat, zdroj: [1]

Herný strom

Herný strom vzniká zo zadaného termu. Môžeme povedať, že stratégia hry je daná týmto termom. Hraná hra je daná syntaxou termov. Konkrétna hra je prechod stromu, teda sekvencia vytvorená paralelnou kompozíciou. Názorný príklad a bližšie vysvetlenie sa nachádza v nasledujúcich kapitolách. Najprv je potrebné definovať herný strom.

Výpočtové stromy a prechody

V hernej sémantike sú stratégie modelované ako herné stromy. Stratégie sú podmnožiny hier v zmysle postupnosti ťahov, ktoré sú komponované pomocou kompozície a skrývania do jedného celku. Prechod stromu je postupnosť uzlov stromu od koreňa po listy. V programovacom jazyku je prechod stromu v podstate program a výsledkom prechodu stromu, teda výsledkom programu je hodnota.



Obr. 2 – 7: Ukážka herného stromu, zdroj: [1]

Na predachádzajúcom obrázku vidíme príklad herného stromu. Všetky uzly označené

- "○"patria protihráčovi,
- "●"patria hráčovi.

Všetky označenia a a b označujú ťahy. Viacero hrán vychádzajúcich z jedného uzla naznačuje viacnásobnosť možností, ktorými vieme odpovedať na danú otázku. Na obrázku sú to napríklad ťahy b_1, b_2 a b_3. Po formálnej stránke vieme hru popísať ako trojicu pozostávajúcu z množiny ťahov hry, termu alebo funkcie, ktorá nám hovorí, že ťahy sa striedajú medzi hráčom a protihráčom a poslednou z trojice je množina sekvencií ťahov daného herného stromu. Vychádzame z definície výpočtového stromu.

Definícia 2.1 *Výpočtový strom $\tau(M)$ jednoducho typovaného termu $\Gamma \vdash M : T$ v spočítaľnej množine vrcholov V je strom s návestiami*

$$\{@\} \cup V \cup \{\lambda x_1 ... x_n | x_1 ... x_n \in N\} \tag{2.1}$$

- *@ označuje koreň stromu,*

- *V je množina všetkých uzlov v hernom strome,*

- *$\lambda x_1 ... x_n | x_1 ... x_n \in N$ je množina všetkých λ-termov, ktoré vytvárajú stratégiu.*

Uzly každej úrovne výpočtového stromu sú λ-uzly. Každý λ-uzol môže reprezentovať niekoľko po sebe idúcich λ-abstrakcií. Každý nepárny uzol je premenná alebo aplikačný uzol.

Píšeme @ na označenie koreňa stromu $\tau(M)$. Množiny uzlov označujeme N s príslušným indexom:

- $N_@$ pre @-uzly,

- N_λ pre λ-uzly,

- N_{var} pre uzly premenných.

Zhodnotenie

V závere tejto podkapitoly je možné konštatovať, že Abramskeho prístup napomáha pri chápaní hernej sémantiky hlavne v oblasti reálnych situácií. Výhodou sú najmä články týkajúce sa spojenia hernej sémantiky a logiky. Pomáha to k pochopeniu hernej sémantiky prostredníctvom logiky, a teda je čitateľ schopný vytvoriť vlastný model použitím hernej sémantiky. Vyzdvihla by som najmä ukážku tvorby herného stromu, čo v značnej miere ovplyvnilo návrh riešenia pre túto diplomovú prácu, nakoľko tvorba herného stromu je jedna z počiatočných úkonov pri riešení problematiky diplomovej práce. Nevýhodou Abramskeho článkov v závislosti s témou diplomovej prace je menej informácií o kategóriách použitých na modelovanie.

2.2.2 Analýza prístupu Hylanda a Onga k hernej sémantike

Hyland sa taktiež venoval téme hernej sémantiky a existuje o tom aj množstvo literatúry, z ktorej sa čerpá aj v tejto práci, najmä [9], [13] a [12]. Úroveň poznatkov, ktoré môžeme nadobudnúť z jeho literatúry je veľmi abstraktná, avšak téma je rozobratá do hĺbky. V tejto práci sa budeme venovať analýze jeho prístupu k tvorbe herného stromu a definujeme základné pojmy rovnako ako v predchádzajúcej kapitole.

Hry, herné stromy a výpočtové arény podľa Hylanda a Onga

Podľa zdroja [9] sú hry, ktoré definoval ako dialógové, dvoch hráčov. Prostredie, v ktorom sú hrané je výpočtová aréna. Hra má deterministický charakter, ktorý vyplýva z danej stratégie. Každý krok hry je zrejmý a daný v prechodoch herným stromom. Existujú dve úrovne, na ktorých vieme špecifikovať herný strom. Prvou je herný strom ako súčasť výpočtovej arény a druhou je herný strom generovaný z množiny ťahov. Ťahy sú všetky cesty stromu, teda prechody. Inak sa nazývajú tiež legálne pozície. V rámci konštrukcie herného stromu sú hráči označený písmenami P (z anglického *player* alebo *proponent*) a O (z anglického *oponent*). Grafickým znázornením hry je diagram herného stromu, v ktorom sú uzly rozlíšené podľa toho, či ich vykonal hráč alebo protihráč. Diagramom vieme ťahy reprezentovať. Ťahy sú určené termom. Poznáme 4 typy ťahov:

- ťah/otázka hráča, ozn. "(",
- odpoveď protihráča, ozn. ")",

- ťah/otázka protihráča, ozn. ”[”,

- odpoveď hráča, ozn. ”]”.

Pomocou kombinácie takýchto zátvoriek, berúc do úvahy to, že každá musí byť správne uzatvorená, teda ”( )älebo ”[ ]”, vieme odvodiť tvrdenie, že otázka hráča môže byť zodpovedaná iba protihráčom, a naopak, otázka protihráča môže byť zodpovedaná iba hráčom. Teda nemôžeme dôjsť do situácie, kde si hráč odpovedá na vlastný ťah. Takto dodržíme striedanie úrovní v hernom strome. Treba zdôrazniť, aby otázka nebola chápaná ako začiatok hry, otázkou je každý uzol v hernom strome, za ktorým nasleduje určitá odpoveď. Ide teda len o postup v hre. Ako bolo spomenuté na začiatku, celá hra sa uskutočňuje vo svojom prostredí, ktorým je výpočtová aréna. Táto výpočtová aréna A obsahuje niekoľko údajov a musia v nej byť dodržané isté pravidlá.

Výpočtová aréna A obsahuje:

1. Čiastočne usporiadanú množinu opytovacích ťahov (otázok) $Qn(A)$. Tieto ťahy vytvárajú les herných stromov takých, že ich koreň je zároveň aj maximálnym prvkom stromu.

2. Prepojenie každej otázky na prvok z množiny odpovedí. Toto prepojenie je možné formálne popísať ako zobrazenie $qn_A : Ans(A) \to Qn(A)$, kde $Ans(A)$ je množina všetkých odpovedí arény A. Odpoveď a považujeme za odpoveď na otázku $qn_A(a)$.

Výpočtová aréna A podlieha nasledujúcim pravidlám:

1. Začiatok hry spočíva vo vykonaní prvého ťahu alebo počiatočného ťahu. Ten musí byť vykonaný vždy protihráčom.

2. V priebehu hry musí byť dodržaná striktná striedavosť hráča a protihráča. Vývoj hry začína v koreni herného stromu, teda závisí od počiatočného ťahu.

Podľa definície v zdroji [9] vieme o sekvencii ťahov vo výpočtovej aréne povedať, že je správne formulovaná práve vtedy, keď spĺňa nasledujúce podmienky:

1. Počiatočný ťah je taká otázka, ktorej nepredchádza nijaký ťah, teda nijaká odpoveď. V súvislosti so sekvenciou ťahov spomenieme aj indexy oprávnenia, ktoré číslujú uzly herného stromu od koreňa k listom. Môžeme ich reprezentovať nezáporným celým číslom n. Podľa konvencie číslovania uzlov stromu, $n_1 = 0$ je hodnota koreňa. Môžeme povedať, že počiatočný ťah nie je podmienený žiadnym iným ťahom.
2. Sekvencia je správne formulovaná, ak sa striedajú ťahy P a O.
3. Existuje možnosť explicitného oprávnenia vykonania ťahu v dvoch prípadoch:
   a V akomkoľvek (nie počiatočnom) ťahu sekvencie ťahov môže byť vykonaný ťah otázky, ak existuje jeho jednoznačná legitímna otázka (predchádzajúci ťah), ktorá nebola zodpovedaná.
   b V akomkoľvek (nie počiatočnom) ťahu sekvencie ťahov môže byť vykonaný ťah odpovede, ak existuje jeho jednoznačná legitímna otázka (predchádzajúci ťah), ktorá nebola zodpovedaná.
4. Posledná zodpovedaná a prvá opýtaná. Podmienku spĺňa každá sekvencia ťahov spĺňajúca prvé 3 podmienky a v ktorej existuje ľubovoľný ťah taký, že má svoj legitímny ťah, ktorý je zároveň posledným nezodpovedaným v danej sekvencii.

Podmienka nevisiaceho otáznika

Hyland v zdroji [9] popísal tzv. podmienku nevisiaceho otáznika. Súvisí so striedaním otázok a odpovedí. Je definované, že ak existuje v sekvencii ťahov otázka, ktorá ešte nemá priradenú žiadnu odpoveď zo strany druhého hráča a ani neobsahuje explicitnú odpoveď a ak táto sekvencia ťahov túto odpoveď dokáže poskytnúť, a teda nezanecháva žiadnu otázku bez odpovede, potom táto sekvencia spĺňa podmienku. Neobsahuje totiž žiadnu ostávajúcu otázku.

Ďalšie kritérium sa týka priority a súvisí so správnym zátvorkovaním sekvencií. V princípe sa využíva vyššie spomenutá podmienka, teda podmienka nevisiaceho otáznika. Ak sekvencia spĺňa podmienku nevisiaceho otáznika a neobsahuje žiadnu ostávajúcu otázku, potom je správne zátvorkovaná. Ako ukážku môžeme použiť nasledujúci príklad, kde vidíme, že každá zo zátvoriek tvorí dvojicu.

$$[\cdot (\cdot [\cdot (\cdot [\cdot (\cdot) \cdot] \cdot) \cdot] \cdot) \cdot] \tag{2.2}$$

Spomenieme aj stratégie a prístup k stratégiám ako takým podľa Hylanda. Rovnako aj tu je význam stratégie chápaný ako vopred určený postup ťahov alebo metóda, na základe ktorej hra postupuje. Stratégia vytvára prostredie pre vlastnosť determinizmu v modeli hry.

Stratégiu môžeme považovať za parciálnu funkciu, ktorej vstup alebo definičný obor tvorí množina ťahov hráča, ktoré nazývame tiež otázky a jej obor hodnôt je odpoveď, teda tiež priradenie novej legálnej pozície. V rámci herného stromu, predstavuje stratégia jeho podstrom, ktorý je v asociácii s výpočtovou arénou. Pri formálnej interpretácii hry hovoríme, že je to súbor všetkých ciest v hernom strome. Stratégia musí spĺňať podmienky determinizmu a uzavretosti. Determinizmus sa prejavuje v jasne danej postupnosti ťahov a uzavretosť v tom, že otázky aj ich odpovede sú z rovnakej stratégie.

Každá sekvencia ťahov arén A_1, A_2, A_3, ..., A_n explicitne obsahuje smerníky, návestia alebo indexy, ktoré väčšinou reprezentujeme číslami z množiny celých čísel a nazývame ich **indexy oprávnenia**.

Zhodnotenie

V závere podkapitoly vieme konštatovať, že Hylandov prístup je zaujímavý z viacerých hľadísk. Rovnako ako pri Abramskom, aj pri Hylandovi je nápomocné vytváranie herného stromu. V týchto zdrojoch sú veľmi detailne popísané ako herné stromy, tak aj prechody hernými stromami. Teda vieme si overiť nami zvolené riešenie konštrukcie herného stromu a vieme si pomocou zdrojov určiť vlastnosti a podmienky prechodu herným stromom. Zaujímavý je aj vzťah hernej sémantiky a operačnej sémantiky alebo aplikácia hernej sémantiky na abstraktný stroj. Síce sa tieto dve hľadiska v práci konkrétne nevyužívajú, sú vhodnou pomocou pri pochopení princípu hernej sémantiky. Nevýhodou Hylandových článkov je najmä štýl písania, miestami je ťažšie čitateľný, čo ale je očakávateľné vzhľadom na zložitosť problematiky.

2.2.3 Porovnanie prístupov

Pre porovnanie oboch prístupov je možné konštatovať, že je bádateľný rozdiel najmä v použití hernej sémantiky. Hyland sa zaoberá skôr abstraktnou stránkou hernej sémantiky, aplikoval ju na abstraktný stroj. U Hylanda vidíme aj použitie výpočtových arén a detailne popísané prechody herným stromom. Abramsky porovnával hernú sémantiku so šachom, čím vzniká intuitívnejšie podanie hernej sémantiky. Abramsky aplikoval hernú sémantiku na logiku. V porovnaní s Hylandom je Abramsky vo väčšej miere zameraný na kategórie. Oba prístupy sú pre túto prácu použiteľné a poskytujú dostatok informácii na tvorbu riešenia rôznych úloh pomocou hernej sémantiky. Nasledujúca kapitola je úvodom do návrhu riešenia a popisuje λ-kalkul, ktorý použijeme v rámci celej praktickej časti tejto diplomovej práce.

3 Princípy typovaného lambda-kalkulu

Podľa zdrojov [17], [18] a [19] λ-kalkul predstavuje zápis pre paradigmu funkcionálneho programovania. Je to jednoduchý zápis funkcií, ktorý nám umožňuje intuitívny zápis. Hlavným objektom pozorovania v tejto diplomovej práci sú termy v λ-kalkule. Z tohto dôvodu je dôležité túto prácu doplniť o základné princípy a pojmy z λ-kalkulu.

3.1 Syntax typovaného lambda-kalkulu

V rámci tejto kapitoly začneme netypovaným λ-kalkulom, ktorý neskôr rozšírime o základné a jednoduché typy podľa zdrojov [19], [20], [21], [22]. Syntax netypovaného λ-kalkulu je definovaná pomocou produkčného pravidla:

$$t ::= x \,|\, \lambda x.\, t \,|\, t\, t \,|\, (t) \tag{3.1}$$

- t predstavuje λ-term,
- x predstavuje premennú,
- $\lambda x.\, t$ predstavuje λ-abstrakciu s parametrom x a telom funkcie t,
- $t\, t$ predstavuje aplikáciu argumentu t na funkciu t,
- (t) predstavuje zátvorkovaný term.

Syntax jednoducho typovaného λ-kalkulu rozširuje syntax netypovaného λ-kalkulu o základné a jednoduché typy. Za základné typy považujeme typ

- Nat pre prirodzené čísla $(1, 2, 3, ...)$,
- $Bool$ pre pravdivostné hodnoty $(true,\ false)$.

Jednoduché typy vznikajú pomocou typových konštruktorov nad základnými typmi. Patria medzi ne nasledujúce:

- funkčný typ,
- súčinový typ,
- súčtový typ.

Zapisujeme ich ako typové výrazy:

- $T_1 \to T_2$ pre funkčný typ,
- $T_1 \times T_2$ pre súčinový typ,
- $T_1 + T_2$ pre súčtový typ.

Pre ciele tejto diplomovej práce je dôležitá znalosť najmä jednoducho typovaného λ-kalkulu a vyššie uvedených typových výrazov. Produkčné pravidlo pre jednoducho typovaný λ-kalkul je dané nasledovne.

$$t \ ::= x \,|\, \lambda x : T.t \,|\, t\, t \,|\, (t) \,|\, true \,|\, false \,|\, if\, t\, then\, t\, else\, t \,|\, 0 \,|\, succ\, t \,|\, pred\, t \,|\, iszero\, t \tag{3.2}$$

V λ-kalkule je daná množina typovacích pravidiel, ktorú ak dodržíme, tak vieme priamo asociovať term s jeho prislúchajúcim typom. Hovoríme, že term patrí do určitého typového kontextu alebo prostredia. Typový kontext značíme obvykle veľkým gréckym písmenom. Označenie, že daný term patrí do určitého typového kontextu, má svoj zaužívaný formálny zápis. Napríklad:

$$\Gamma \vdash t : T \tag{3.3}$$

- Γ predstavuje typový kontext,
- t predstavuje typovaný term,
- T predstavuje typ termu.

4 Kategórie

Kategória má viaceré definície podľa viacerých zdrojov. V zdrojoch [15], [16], [23], [24], [25] a [26] sú zhrnuté až dve definície. Podľa prvej je kategória definovaná ako orientovaný graf. Podľa druhej definície môžeme kategóriu považovat za matematickú štruktúru, ktorá sa skladá z tried objektov a tried morfizmov. Ďalej existuje množstvo iných definícií kategórie, ktoré dokazujú, že neexistuje všeobecné tvrdenie, ktoré jednoznačne definuje kategóriu. Je to matematická štruktúra, ktorou vieme zapísat množiny, tzv. kategória množín, ďalej vieme kategóriu použiť na grafické znázornenie funkcionálneho jazyka. V tejto diplomovej práci sa budeme riadiť nasledujúcou definíciou.

Definícia 4.1 *Kategória je matematická štruktúra, ktorá pozostáva z*

- *triedy objektov,*
- *triedy morfizmov medzi objektami,*

ktoré spĺňaju nasledujúce vlastnosti:

- *každý objekt ma identický morfizmus,*
- *ak morfizmy sú kompozibilné, t.j.* $f : A \to B$ *a* $g : B \to C$*, potom existuje morfizmus* $h : A \to C$ *taký, že* $g \circ f = h$*.*

Pomerne široké využitie tejto štruktúry nám poskytuje vhodné podmienky na modelovanie výpočtu typovaných termov. Cieľom tejto kapitoly je uviesť základné pojmy súvisiace s kategóriami. V nasledujúcich kapitolách už budeme predpokladať čitateľovu znalosť tejto terminológie.

- objekty - vo všeobecnosti platí, že objekt kategórie je zvolený na základe toho, čo chceme v kategórii zobrazovať, napríklad pri kategórii množín je objetom množina alebo pri kategórii funkcionálneho jazyka sú objektami základné typy, ktoré daný funkcionálny jazyk obsahuje,

- morfizmy - morfizmus je vzťah medzi objektami, zobrazenie jedného objektu do druhého,
- produkt - produkt použijeme ako objekt v kategórii pre výpočtové arény súčinového typu podľa nasledujúcej definície,

  Definícia 4.2 *Produkt objektov A a B je produkt U s dvoma morfizmami $proj_1 : U \to A$ a $proj_2 : U \to B$, ktoré nazývame projekcie alebo projekčné morfizmy.*

- exponenciálny objekt - exponenciálny objekt je konštrukcia nad objektami kategórie, exponenciálny objekt je definovaný nasledovne:

  Definícia 4.3 *Exponenciálny objekt B^A je konštrukcia nad objektami A a B v kategórii, ak existuje morfizmus $eval : B^A \times A \to B$.*

4.1 Kategória funkcionálneho jazyka

V tejto kapitole je priblížený pojem stratégie v hernej sémantike. Podľa predchádzajúcej kapitoly, stratégia je postupnosť ťahov v určitom chronologickom poradí. V tejto postupnosti sa striedajú aktéri týchto ťahov, a teda hráč a protihráč. Podľa teórie množín [12] je stratégia podmnožinou hry, ak hru považujeme za množinu všetkých postupností ťahov, ktoré možno v hre uskutočniť. Táto definícia súvisí aj s prirovnaním stratégie k programu. Teda stratégia je z hľadiska paradigmy funkcionálneho programovania program. Keďže v tejto práci je pre formálny zápis programov používaný λ-kalkul, každý λ-term je stratégiou.

Význam stratégií v tejto práci je kľúčový, nakoľko budeme skúmať správanie sa typov vo výpočte danej stratégie. Výpočtová aréna združuje viacero termov toho istého typu. Hovoríme o tzv. lese herných stromov. Teda presnejšie povedané, v tejto práci skúmame správanie sa typov vo výpočtových arénach. Bližšie vysvetlenie je uvedené v nasledujúcich kapitolách.

4.1.1 Typ ako objekt v kategórii

Táto kapitola popisuje úlohu kategórií v hernej sémantike ako matematických štruktúr používaných pre popis modelu hernej sémantiky do tzv. matematického jazyka. Na vypracovanie tejto kapitoly boli použité zdroje [2], [3], [10] a [15]. V oboch predchádzajúcich kapitolách bolo uvedené, že Abramsky a Hyland popisovali tvorbu modelu hry pomocou kategórie. V tejto kapitole konštruujeme kategóriu, ktorej objektom je základný typ a morfizmom je term.

Každý λ-term má svoj proces výpočtu. Výpočet λ-termu sa vykonáva pomocou β-redukcie. Ide o postupné aplikovanie funkcie na ich hodnoty pomocou substitúcie a výsledkom β-redukcie je vyhodnotenie λ-termu, teda jeho sémantika. Uvedieme nasledujúci príklad.

Príklad 4.1 *V tomto príklade je uvedený postup ako sa daný term vyhodnotí pomocou β-redukcie. V princípe ide o aplikovanie argumentu, ktorý sa nachádza na pravej strane termu, na všetky viazané premenné. Definovali sme si term $\lambda x.\lambda z.x\,z$ a aplikujeme naňho argument y.*

- $(\lambda x.\lambda z.x\,z)\,y$,

  Po prvom kroku β-redukcie je premenná x nahradená argumentom y, a teda vynechávame aj zápis λx z termu.

- $\lambda z.y\,z$,

  V tomto príklade sme uviedli ako vyzerá jeden krok β-redukcie.

□

Na predchádzajúcom príklade vidíme substitúciu y za každý viazaný výskyt premennej x. Výsledok redukcie je rôzny podľa substitúcie a výskytu danej premennej v terme. Na nasledujúcich príkladoch môžeme vidieť rôzne výsledky β-redukcie, ktoré sú zaznačené na pravej strane termu.

Príklad 4.2 *V tomto príklade ukážeme ako tvar termu a viazanosť premennej ovplyvní výsledok λ-termu po jednom kroku β-redukcie.*

- $(\lambda x.x)\, z \rightarrow z$
- $(\lambda x.y)\, z \rightarrow y$
- $(\lambda x.x\, y)\, z \rightarrow z\, y$

Ako príklady sme použili λ-termy a aplikovali sme na nich rôzne argumenty, ktoré zapríčinia rôzne výsledky.

□

Podľa definície kategórie, musíme najprv definovať objekty a morfizmy. Pri modelovaní kategórie funkcionálneho jazyka budeme za objekt považovať základný typ, ktorý neskôr v nasledujúcich kapitolách transformujeme do výpočtovej arény a morfizmom bude samotný výpočet termu, teda zmena typu.

Budeme konštruovať kategóriu $\mathscr{A}$, kde budú platiť nasledujúce body.

- objektom kategórie je základný typ,
- morfizmom kategórie je term.

Určíme si základné typy, ktoré budú predstavovať objekty.

- typ Nat, ktorý nadobúda hodnoty z množiny prirodzených čísel,
- typ $Bool$, ktorý nadobúda hodnoty z množiny pravdivostných hodnôt,
- typ $Char$, ktorý nadobúda hodnoty z množiny znakov.

K týmto objektom patria nasledujúce morfizmy.

- $succ : Nat \rightarrow Nat$, teda operácia nasledovníka,
- $iszero : Nat \rightarrow Bool$, teda operácia, ktorá zisťuje, či hodnota je rovná 0 a vráti hodnotu typu $Bool$,

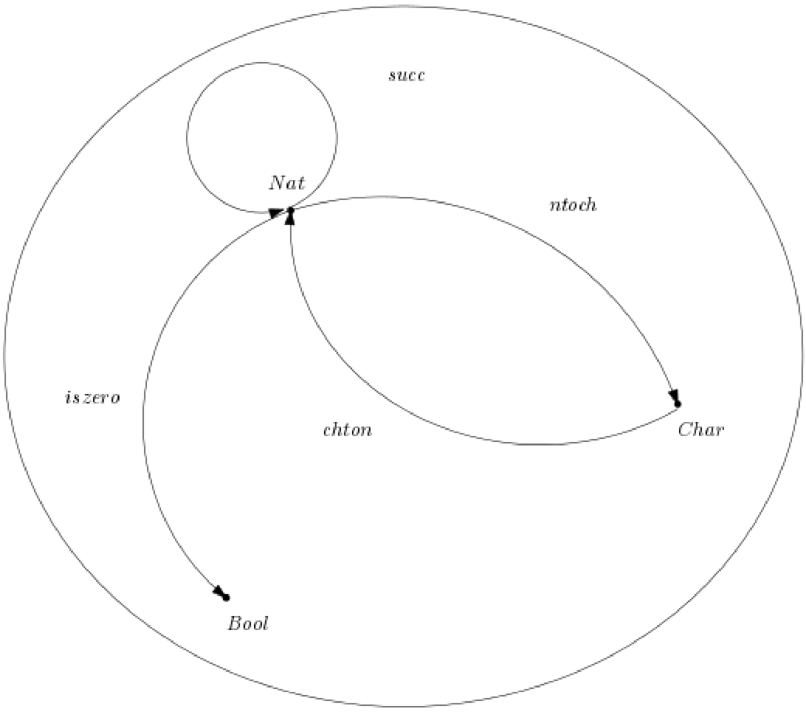
- *chton* : $Char \to Nat$, teda operácia, ktorá konvertuje hodnotu typu $Char$ na hodnotu typu Nat,
- *ntoch* : $Nat \to Char$, teda operácia, ktorá konvertuje hodnotu typu Nat na hodnotu typu $Char$.

Pre kategóriu $\mathscr{A}$ máme definované všetky parametre a vieme konštruovať orientovaný graf podľa definície.

Definícia 4.4 *Kategória $\mathscr{C} = (G_0, G_1, c, u)$ je orientovaný graf so slučkami, ktorý sa skladá z*

- *množiny G_0 vrcholov grafu, ktoré nazývame $objekty$,*
- *množiny G_1 hrán grafu, ktoré nazývame $morfizmy$,*
- *funkcie $c : G_2 \to G_1$, ktorú nazývame $kompozícia\, morfizmov$,*
- *funkcie $u : G_0 \to G_1$, ktorá pre ľubovoľný objekt A predstavuje $identický\, morfizmus$ a označujeme ho id_A.*

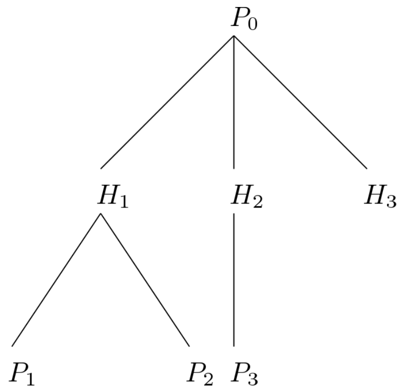
Podľa tejto definície bude kategória $\mathscr{A}$ vyzerať nasledovne.



Obr. 4 – 1: Kategória pre funkcionálny jazyk

5 Herné stromy a výpočtové arény

V tejto kapitole budeme definovať a konštruovať herný strom pre výpočet termu. Herný strom považujeme za podmnožinu hry, čo znázorníme aj na jednoduchých príkladoch. Na obrázku vidíme, že na základe termu sa strom vyvíja určitým smerom, ale existujú aj viaceré iné možnosti vývoja herného stromu, ktoré sa vyvíjajú paralelne so zvolenou stratégiou. Môžeme tvrdiť, že existuje viacero stratégií v rámci jednej hry. Každá z nich je konečná, nakoľko obsahuje posledný ťah. Zaujímavosťou je, že túto vlastnosť hernej sémantiky vieme spojiť aj so skutočnosťami reálneho sveta. Každú hru je predsa možné hrať pomocou viacerých rôznych stratégií a každá z nich môže byť konečná a víťazná. Na obrázku je uvedený príklad stromu pre hru, teda množinu stratégií.



Obr. 5 – 1: Ukážka hry ako množiny stratégií

Na obrázku je znázornený strom hry. Strom obsahuje nasledujúce uzly a stratégie:

- uzol P_0, ktorý predstavuje koreň stromu, musí to byť otázka protihráča, preto je označený P,
- uzly H_1, H_2 a H_3, ktoré predstavujú otázky hráča
- uzly P_1 a P_2, koré predstavujú odpovede na otázku H_1,
- uzol P_3, korý predstavuje odpoveď na otázku H_2,
- stratégiu s_1, ktorú predstavujú uzly P_0, H_1, P_1,

- stratégiu s_2, ktorú predstavujú uzly P_0, H_1, P_2,
- stratégiu s_3, ktorú predstavujú uzly P_0, H_2, P_3,
- stratégiu s_3, ktorú predstavujú uzly P_0, H_3.

Herný strom predstavuje podmnožinu hry a je definovaný nasledovne.

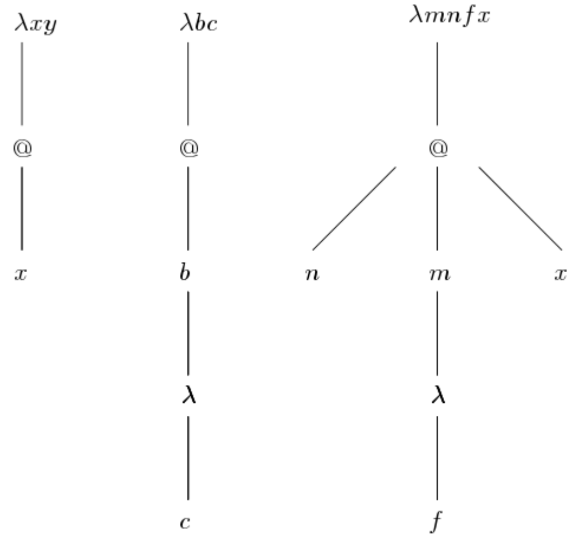
Definícia 5.1 *Herný strom je údajová štruktúra, ktorá pozostáva z*

- *vrcholu, ktorý je v hernom strome práve jeden a od zvyšku stromu ho oddeľujeme označením @,*
- *množiny uzlov, ktoré rozdeľujeme na otázku hráča a protihráča a označujeme ich λ-uzly (otázka protihráča) a uzly premenných (otázka hráča).*

Ukážeme rôzne herné stromy a zavedieme správne označovanie pre jednotlivé uzly a hrany. Najprv si definujeme termy, pre ktoré budeme konštruovať herný strom.

- $tru = \lambda xy.\, x$
- $and = \lambda bc.\, b\, c$
- $times = \lambda mnfx.\, n\, (m\, f)\, x$

Herné stromy pre tieto termy sú znázornené na nasledujúcom obrázku.



Obr. 5 − 2: Herné stromy pre termy *tru*, *and* a *times*

Takto vyzerá konštrukcia herného stromu pre znázornenie výpočtu termu. Na príkladoch vidíme, že každý strom má

- koreň označený @-uzlom,
- následné uzly hráča a protihráča, ktoré sa striedajú,
- na herných stromoch termov *and* a *times* vidíme, že v prípade aplikácie argumentu na term vkladáme pri konštrukcii herného stromu jeden λ-uzol, ktorým dodržiavame striedanie otázok a odpovedí v stratégii podľa Abramskeho definície herného stromu.

Definovali sme ako má vyzerať herný strom, jeho koreň, jednotlivé vetvy a ozančenie výsledného typu. Môžeme prejsť ku konštrukcii herného stromu pre jednoduché typy, ktorými sú funkčný a súčinový typ.

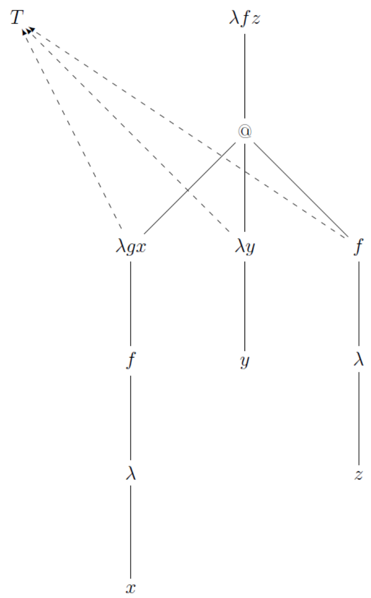
5.1 Herné stromy pre termy jednoduchého typu

V tejto kapitole transformujeme herný strom jednoduchého typu. Neskôr z termov jednoduchého typu vytvoríme výpočtovú arénu daného typu.

Definujeme si term, pre ktorý názorne konštruujeme herný strom.

$$t = \lambda fz.(\lambda gx.fx)(\lambda y.y)(fz) \tag{5.1}$$

Herný strom termu t vyzerá nasledovne.



Obr. 5 – 3: Herný strom pre term t

Na obrázku vidíme nasledujúce prvky herného stromu:

- uzol λfz, ktorý predstavuje prvý ťah protihráča (otázku protihráča),
- uzol @, ktorý oddeľuje koreň stromu od vetiev,
- uzly jednotlivých podtermov $\lambda gx.f\,x$, $\lambda y.y$, $f\,z$,
- uzly λ, ktoré naznačujú aplikáciu termu t_1 na term t_2, v tomto príklade sú aplikácie $\lambda gx.f\,x$ a $f\,z$,
- konečné uzly, ktoré ukončujú akcie otázok a iniciujú akcie odpovedí, kde odpovede potujú späť ku koreňu, a tak dostávame výsledok, teda hodnota typu T.

Pri znázornení typu postupujeme tak, aby bol dostatočne zrozumiteľný rozdiel medzi typom a termom. Prerušovanou čiarou je označený typ podtermov, a teda aj celého termu. Nasledujúce podkapitoly sú ukážkami konštrukcie herného stromu pre termy, kde sú použité konkrétne jednoduché typy.

5.2 Herný strom pre termy funkčného typu

Táto podkapitola je venovaná konštrukcii herného stromu pre termy funkčného typu. Funknčný typ je jednoduchý typ, ktorý vzniká zo základných typov pomocou typového konštruktora $\rightarrow$, čo rozširuje syntax typovaného λ-kalkulu.

$$T ::= ... \,|\, T \rightarrow T \tag{5.2}$$

Funkčný typ je asociatívny sprava. Platí nasledovné:

$$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 = T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_3 \tag{5.3}$$

Prvkami funkčného typu sú $funkcie$, to znamená, že pre funkčný typ $T_1 \rightarrow T_2$ je typ každej funkcie, pre ktorú platí, že

- T_1 je definičný obor,
- T_2 je obor hodnôt.

Príklady funkčných typov, kde používame základné typy ako *Bool* a Nat môžu byť takéto:

$$Bool \rightarrow Nat \tag{5.4}$$

$$(Bool \rightarrow Bool) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \tag{5.5}$$

$$(Nat \rightarrow Bool) \rightarrow Nat \rightarrow Bool \tag{5.6}$$

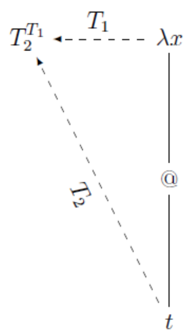
Definujeme si niekoľko príkladov termov funkčného typu.

$$t_1 = \lambda x.\, t : T_1 \rightarrow T_2 \tag{5.7}$$

$$t_2 = \lambda x.\, (\lambda g.gx)\, (\lambda y.y) : (T_1 \rightarrow T_2) \rightarrow T_3 \tag{5.8}$$

Na základe týchto termov konštruujeme herný strom s označením typov. Do grafického zobrazenia zaznačíme základné typy a z nich vyplývajúci funkčný typ.

Pre term t_1 bude herný strom vyzerať nasledovne:

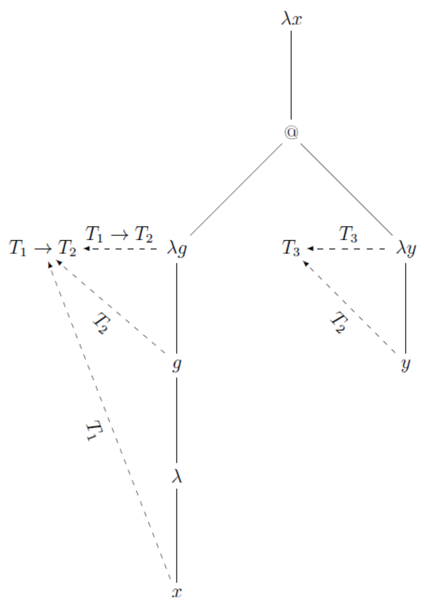


Obr. 5 – 4: Herný strom pre term t_1

Herný strom t_1 obsahuje nasledujúce prvky:

- uzol λx, ktorý predstavuje prvý ťah protihráča (otázku protihráča) a je oddelený uzlom @,
- uzol jediného podtermu t, ktorý je zároveň konečným ťahom,
- Typ T_1, ktorý je typom premennej x,
- Typ T_2, ktorý je typom premennej t,
- Typ $T_2^{T_1}$, ktorý je výsledným typom termu t_1, môžeme ho označiť aj $T_1 \rightarrow T_2$.

Ďalej konštruujeme herný strom pre term t_2, ktorý je komplikovanejší. Rozdelíme ho do dvoch obrázkov. Prvý označuje typy jednotlivých podstromov.

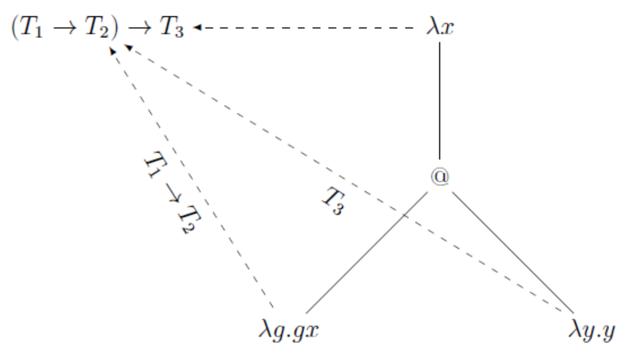


Obr. 5 – 5: Herný strom pre term t_2

Herný strom je rozdelený na dva podstromy, kde každý podstrom predstavuje jeden podterm. Pre každý podterm je prerušovanou čiarou definovaný typ nasledovne:

- podterm $\lambda g.gx$ je typu $T_1 \rightarrow T_2$,
- podterm $\lambda y.y$ je typu T_3.

V nasledujúcom diagrame výpočtovej arény vidíme konečný funkčný typ celého termu, ktorý vzniká z typov podstromov.



Obr. 5 – 6: Herný strom pre term t_2 s typmi

5.3 Herný strom pre termy súčinového typu

Súčinový typ je jednoduchým typom, ktorý pozostáva zo základných typov. Medzi jednoduché typy sme už v predchádzajúcich kapitolách zahrnuli typy Nat a $Bool$. Súčinový typ vzniká použitím typového konštruktora $\times$ nad základnými typmi. Teda ak T_1 a T_2 sú základné typy, tak súčinový typ bude $T_1 \times T_2$, ktorý nazývame aj *produkt*. V programovacom jazyku je súčinový typ používaný na konštrukciu rôznych údajových štruktúr, napríklad pole (*array*) či záznam (*record*). Prvkami súčinového typu sú usporiadané dvojice hodnôt daného typu. Napríklad:

$$< t_1 : T_1, t_2 : T_2 > \tag{5.9}$$

Vidíme, že t_1 a t_2 sú prvkami dvojice, ktorých typy sú pridelené tak, že t_1 je typu T_1 a t_2 je typu T_2. Pri použití konkrétnych hodnôt by dvojice a ich typy vyzerali nasledovne:

$$< 1, 2 >, < 6, 12 >, ... : Nat \times Nat \tag{5.10}$$

$$< 1, true >, < 6, false >: Nat \times Bool \tag{5.11}$$

Operácie nad súčinovým typom sa nazývajú *projekcie*. Term $< t_1, t_2 >$ má dve projekcie, ktoré nazveme $proj1$ a $proj2$. Jednotlivé projekcie majú nasledovný formálny zápis:

$$proj1 : T_1 \times T_2 \to T_1 \tag{5.12}$$

$$proj2 : T_1 \times T_2 \to T_2 \tag{5.13}$$

Herný strom pre term súčinového typu vzniká súčinom dvoch činiteľov, ktorými sú termy $t_1 : T_1$ a $t_2 : T_2$. Projekcie $proj1$ a $proj2$ sú operáciami nad základnými typmi v súčinovom type.

Cieľom tejto kapitoly je popis konštrukcie herného stromu pre term súčinového typu, v ktorom znázorníme jednotlivé typy a výsledný súčinový typ.

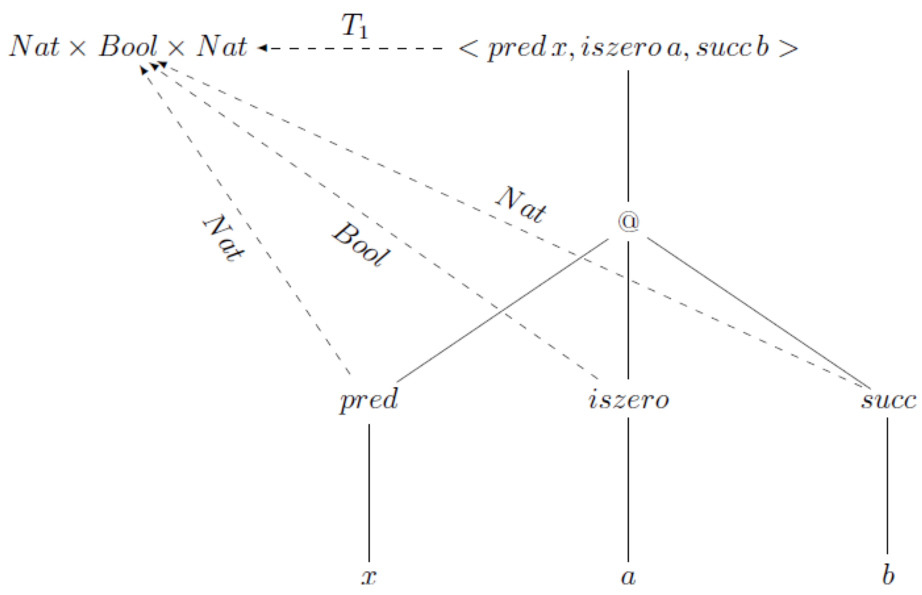
Rovnako ako v predchádzajúcich kapitolách si definujeme niekoľko termov a skonštruujeme pre ne herný strom.

Termy súčinového typu sú nasledovné:

$$t_1 =< pred\, x : Nat, iszero\, a : Bool, succ\, b : Nat >: Nat \times Bool \times Nat \tag{5.14}$$

$$t_2 =< pred\, k : Nat, if\, true\, then\, false\, else\, false : Bool >: Nat \times Bool \tag{5.15}$$

Pre term t_1 bude herný strom vyzerať nasledovne.

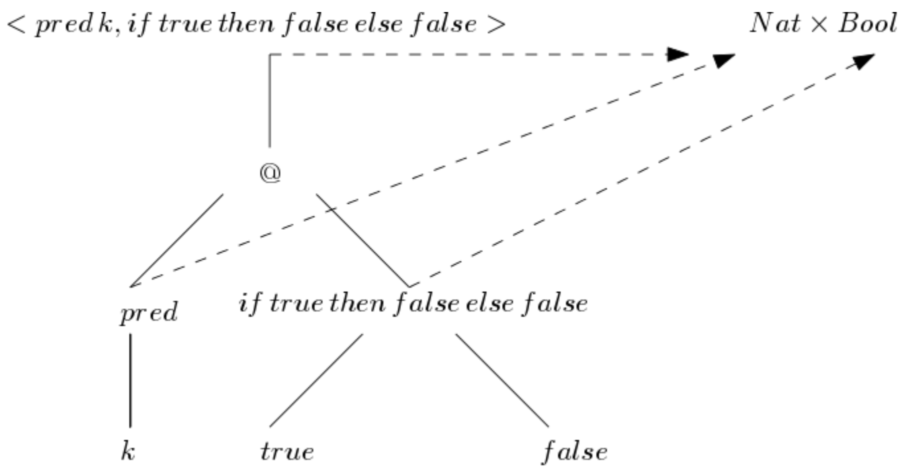


Obr. 5 – 7: Herný strom pre term t_1

Na orázku vidíme jednolivé prvky, ktoré sú charakteristické pre herný strom:

- počiatočný term $< pred\, x,\ iszero\, a,\ succ\, b >$,
- koreň stromu označený symolom @, pod ktorým sa nachádzajú vetvy, ktoré charakterizujú podtermy,
- vetvy stromu sú jednotlivé podtermy $pred\, x$, $iszero\, a$ a $succ\, b$,
- vetvy podtermov obsahujú premenné x, a a b, nad ktorými je vykonaná daná operácia,
- prerušovanou čiarou je naznačený výsledný typ $Nat \times Bool \times Nat$, ktorý je súčinom typov jednotlivých podtermov.

Pre term t_2 bude herný strom vyzerať nasledovne.



Obr. 5 – 8: Herný strom pre term t_2

Tento herný strom osahuje nasledujúce prvky:

- počiatočný term $< pred\, k,\ if\, true\, then\, false\, else\, false >$,
- koreň stromu označený symolom @, pod ktorým sa nachádzajú vetvy, ktoré charakterizujú podtermy,
- vetvy stromu sú jednotlivé podtermy $pred\, k$ a $if\, true\, then\, false\, else\, false$,

- vetva podtermu $pred\, k$ obsahuje premennú k, nad ktorou je vykonaná operácia $pred$,
- vetva podtermu $if\, true\, then\, false\, else\, false$ obsahuje konštanty $true$ a $false$, ktoré sú parametrami operácie vetvenia,
- prerušovanou čiarou je naznačený výsledný typ $Nat \times Bool$, ktorý je súčinom typov jednotlivých podtermov.

Výsledný typ termu v oboch diagramoch je súčinom typov jednotlivých podtermov. V nasledujúcej kapitole budeme konštruovať výpočtovú arénu daného typu pre rovnaké typované termy. Nadobudnuté poznatky budú použité na záver pri ilustrácii riešenia na konkrétnych príkladoch.

6 Konštrukcia výpočtových arén daného typu

Cieľom tejto kapitoly je ukázať, akým spôsobom vieme konštruovať výpočtovú arénu. Použijeme na to herné stromy funkčného a súčinového typu a budeme vychádzať z nadobudnutých poznatkov z predchádzajúcej kapitoly, kde sme definovali spôsob konštrukcie herného stromu pre typované termy. V každej podkapitole použijeme tie isté príklady termov, teda táto kapitola bude nadväzovať na postupy v predošlej kapitole. Prvá podkapitola bude venovaná konštrukcii výpočtových arén pre herný strom funkčného typu, druhá podkapitola bude venovaná konštrukcii výpočtových arén pre herný strom súčinového typu.

6.1 Konštrukcia výpočtových arén pre herné stromy funkčného typu

V tejto podkapitole konštruujeme výpočtovú arénu, v ktorej sa nachádzajú

- základné typy herného stromu,
- funkčné typy herného stromu, ktoré vzniknú zo základných typov,
- termy, resp. podtermy herného stromu.

Výpočtové arény budú združovať termy daného typu. Budeme konštruovať výpočtovú arénu nasledujúcich typovaných termov.

$$t_1 = \lambda x.t : T_1 \to T_2 \tag{6.1}$$

$$t_2 = \lambda x.(\lambda g.gx)(\lambda y.y) : T_1 \to T_2 \to T_3 \tag{6.2}$$

V každom príklade vychádzame z herného stromu konštruovaného v predachádzajúcej kapitole.

Konštruujeme výpočtovú arénu $\mathscr{A}$ pre term t_1, ktorá bude obsahovať nasledujúce prvky:

- základný typ T_1,
- funkčný typ $T_1 \to T_2$ ako daný typ výpočtovej arény,
- term $t_1 = \lambda x.t$ ako stratégiu,
- term t ako operáciu v stratégii.

Ukážka výpočtovej arény $\mathscr{A}$ je znázornená na nasledujúcom obrázku.

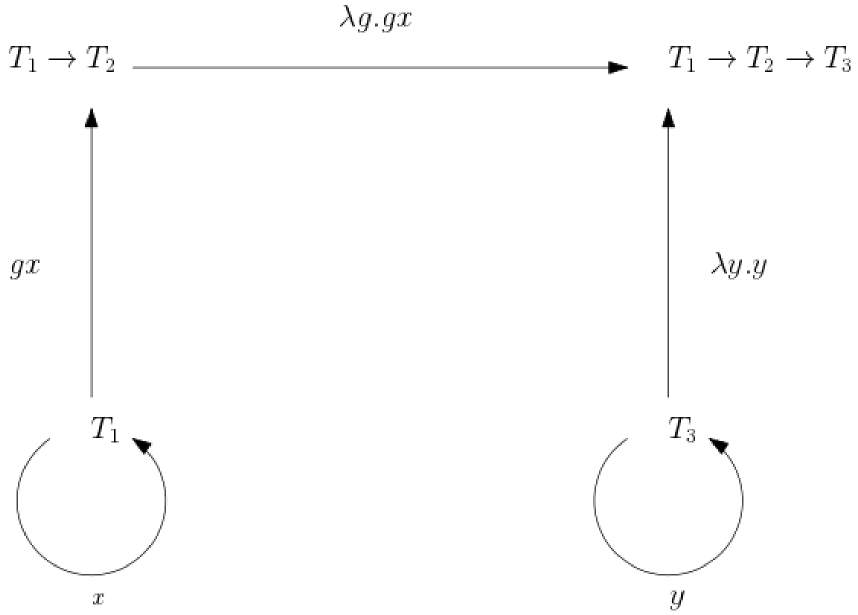
$$\begin{tikzcd} T_1 \arrow[loop left, "t"] \arrow[rr, "\lambda x.t"] & & T_1 \to T_2 \end{tikzcd}$$

Obr. 6 − 1: Konštrukcia výpočtovej arény $\mathscr{A}$ funkčného typu

Ďalej konštruujeme výpočtovú arénu $\mathscr{B}$ pre herný strom t_2, ktorý bude obsahovať nasledujúce prvky:

- základné typy T_1, T_2, z ktorých budeme vychádzať,
- funkčné typy $T_1 \to T_2$, $T_1 \to T_2 \to T_3$ ako dané typy výpočtovej arény,
- term $t_2 = \lambda x.(\lambda g.gx)(\lambda y.y)$ a jeho podtermy $\lambda g.gx$ a $\lambda y.y$ ako stratégie,
- termy x a y ako operácie v stratégii.

Výpočtová aréna $\mathscr{B}$ je znaázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 6 – 2: Konštrukcia výpočtovej arény $\mathscr{B}$ funkčného typu

Konštruovali sme výpočtové arény

- $\mathscr{A}$ typu $T_1 \to T_2$,
- $\mathscr{B}$ typu $T_1 \to T_2 \to T_3$.

6.2 Konštrukcia výpočtových arén pre herné stromy súčinového typu

V tejto podkapitole konštruujeme výpočtovú arénu, v ktorej sa nachádzajú

- súčinové typy daných herných stromov,
- termy, resp. podtermy herných stromov reprezentujúce stratégie.

Rovnako ako pri konštrukcii výpočtových arén pre herné stromy funkčného typu, aj tu vychádzame z príkladov z predchádzajúcej kapitoly, kde sme konštruovali herný strom pre nasledujúce typované termy:

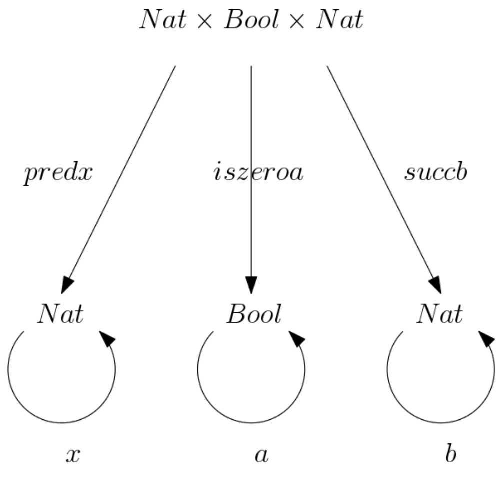
$$t_1 =< pred\, x : Nat, iszero\, a : Bool, succ\, b : Nat >: Nat \times Bool \times Nat \quad (6.3)$$

$$t_2 =< pred\, k : Nat, if\, true\, then\, false\, else\, false : Bool >: Nat \times Bool \times Nat \quad (6.4)$$

Konštruujeme výpočtovú arénu $\mathscr{C}$ pre herný strom t_1, ktorá bude obsahovať nasledujúce prvky:

- základné typy Nat a $Bool$,
- súčinový typ $Nat \times Bool \times Nat$,
- termy $pred\, x$, $iszero\, a$ a $succ\, b$,
- premenné x, a a b.

Ukážka výpočtovej arény $\mathscr{C}$ je znázornená na nasledujúcom obrázku.



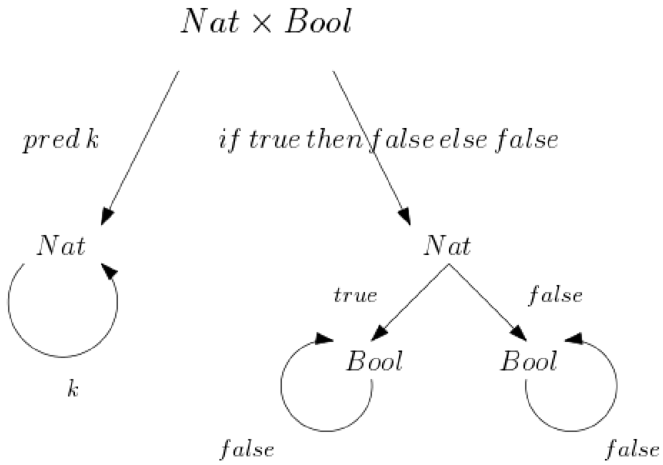
Obr. 6 – 3: Konštrukcia výpočtovej arény $\mathscr{C}$ súčinového typu

Ďalej konštruujeme výpočtovú arénu $\mathscr{D}$ pre herný strom t_2, ktorá bude obsahovať nasledujúce prvky:

- základné typy Nat a $Bool$,

- súčinový typ $Nat \times Bool$,
- termy $pred\,k$ a $if\,true\,then\,false\,else\,false$,
- premennú k,
- konštanty $true$ a $false$.

Ukážka výpočtovej arény $\mathscr{D}$ je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 6 – 4: Konštrukcia výpočtovej arény $\mathscr{D}$ súčinového typu

Konštruovali sme výpočtové arény

- $\mathscr{C}$ typu $Nat \times Bool \times Nat$,
- $\mathscr{D}$ typu $Nat \times Bool$.

Pre jednoduchosť nezobrazujeme vo výpočtovej aréne herné stromy. Herné stromy budeme zobrazovať vo výpočtových arénach v nasledujúcej kapitole, kde budeme detailne popisovať výpočty. Tento priebeh zobrazíme v kategórii, ktorú sme si v predchádzajúcich kapitolách definovali.

7 Konštrukcia kategórií výpočtových arén

V tejto kapitole sa budeme riadiť postupom, ktorý je popísaný v predchádzajúcich dvoch kapitolách, čo do konštrukcie herného stromu pre výpočtovú arénu, určenia typu v jednotlivých fázach výpočtu termu a následnej konštrukcie kategórie, kde objektom je výpočtová aréna daného typu (funkčný alebo súčinový) a morfizmom je stratégia, teda term výpočtovej arény. V tejto kapitole použijeme konkrétne hodnoty pre argumenty termov a konkrétne typy. Cieľom tejto kapitoly je ilustrovať navrhnuté riešenie na konkrétnych príkladoch, čím dokážeme, že herná sémantika poskytuje riešenie pre interpretáciu funkcionálneho jazyka, ktoré je zároveň ekvivalentným k spojeniu operačnej a denotačnej sémantiky.

7.1 Konštrukcia kategórie pre výpočtové arény funkčného typu

Príklad A.

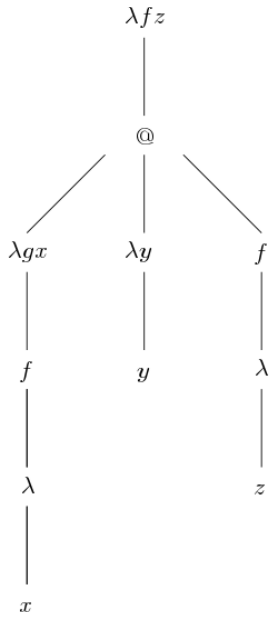
Pri ilustrácii použijeme typovaný term a.

$$a = \lambda fz(\lambda gx.f\,x)\,(\lambda y.y)\,(f\,z) : (Nat \to Nat) \to Bool \to Nat \tag{7.1}$$

Pre term a konštruujeme kategóriu $\mathscr{E}$ a budeme postupovať v nasledujúcich krokoch:

1. Konštrukcia herného stromu pre term a.
2. Konštrukcia výpočtových arén pre jednotlivé podtermy termu a.
3. Konštrukcia kategórie $\mathscr{E}$, ktorá bude obsahovať
   - výpočtové arény ako objekty,
   - stratégie ako morfizmy.

Herný strom pre term a je znázornený na obrázku.



Obr. 7 − 1: Herný strom pre term a

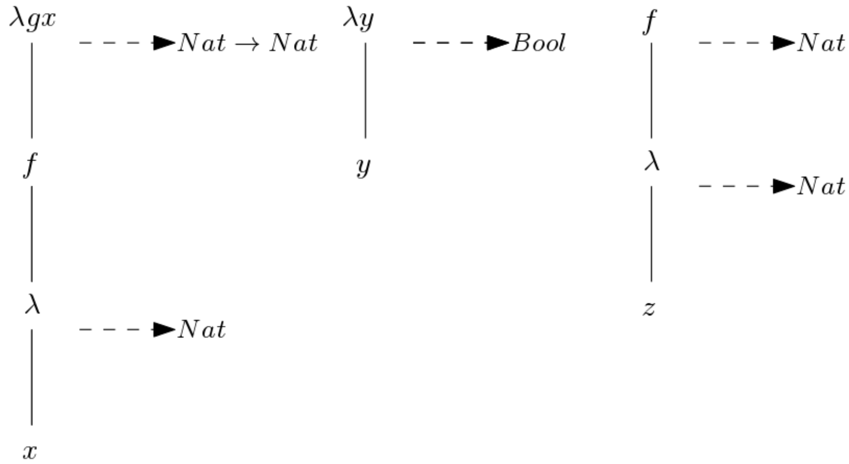
Herný strom rozdelíme na jednotlivé podstromy, teda budeme konštruovať herný strom pre podtermy termu a, ktoré sú:

$$a_1 = \lambda gx.f\,x \tag{7.2}$$

$$a_2 = \lambda y.y \tag{7.3}$$

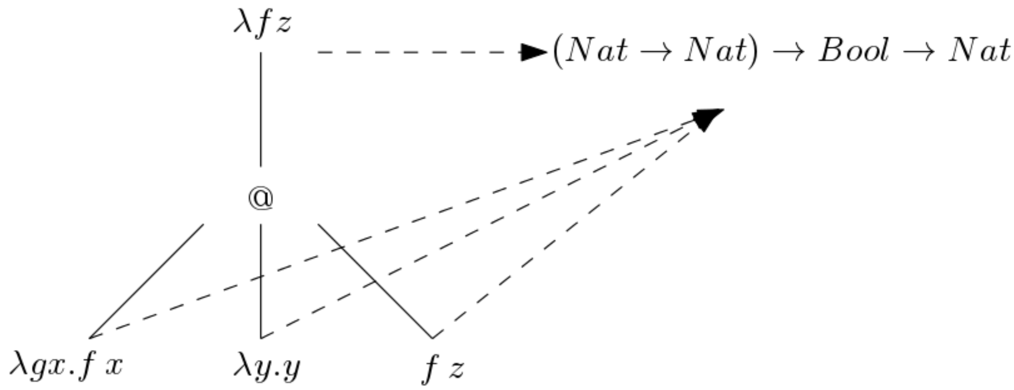
$$a_3 = f\,z \tag{7.4}$$

Na obrázku sú znázornené herné stromy pre jednotlivé podstromy a_1, a_2 a a_3 pre herný strom termu a.



Obr. 7 − 2: Herné stromy pre vetvy a_1, a_2 a a_3 termu a

Podľa typov jednotlivých podtermov určíme typ pre term a.



Obr. 7 − 3: Určenie typu pre term a

Ďalej budeme konštruovať výpočtové arény:

- výpočtové arény typu Nat a $Bool$,
- výpočtové arény typu $Nat \to Nat$, $(Nat \to Nat) \to Bool$ a $(Nat \to Nat) \to Bool \to Nat$,
- termy $\lambda gx.f\,x$, $\lambda y.y$, $f\,z$,
- výsledný term $\lambda fz(\lambda gx.f\,x)(\lambda y.y)(f\,z) : (Nat \to Nat) \to Bool \to Nat$.

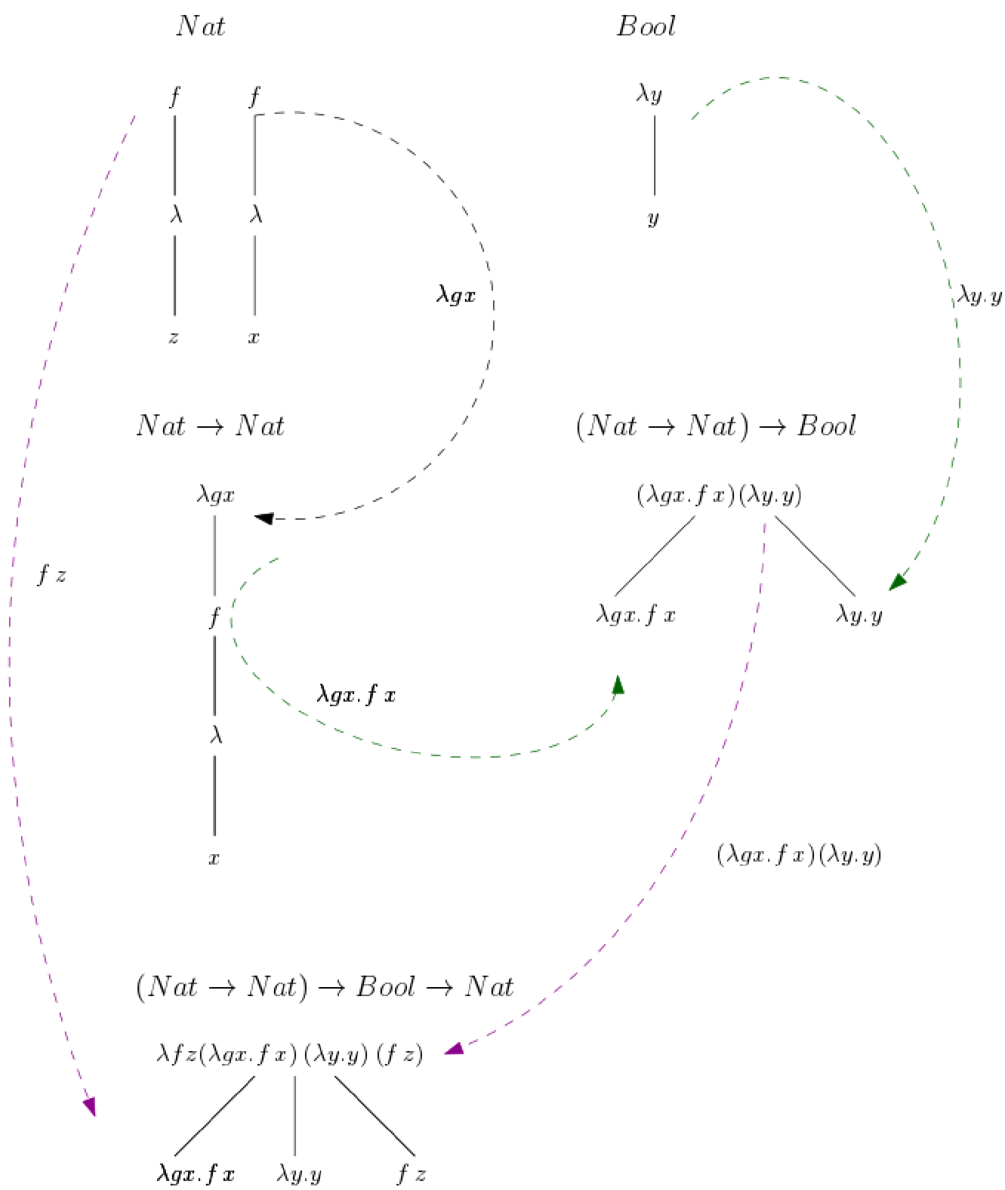
$$
\begin{tikzcd}
(Nat \to Nat) \to Bool \to Nat & Nat \arrow[l, "\lambda f z(\lambda gx.f\,x)(\lambda y.y)(f\,z)"'] \arrow[d, "\lambda gx.f\,x"] \arrow[loop above, "f\,z"] \arrow[loop right, "f\,x"] \\
Bool \arrow[u, "(\lambda gx.f\,x)(\lambda y.y)"] \arrow[loop left, "\lambda y.y"'] & Nat \to Nat \arrow[l, "(\lambda gx.f\,x)"']
\end{tikzcd}
$$

Obr. 7 – 4: Výpočtová aréna pre term a

Ako posledný krok budeme konštruovať kategóriu $\mathscr{E}$, ktorá obsahuje:

- objekty - výpočtové arény typu Nat, $Bool$, $Nat \to Nat$, $(Nat \to Nat) \to Bool$ a $(Nat \to Nat) \to Bool \to Nat$,
- morfizmy - stratégie $\lambda gx.f\,x$, $\lambda y.y$, $f\,z$

Kategória je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 7 – 5: Kategória $\mathscr{E}$ pre výpočtové arény funkčného typu

Daná kategória obsahuje výpočtové arény, ktoré obsahujú herné stromy rovnakého typu. Medzi týmito výpočtovými arénami sú prerušovanými šípkami označené vzťahy, teda stratégie. Pre prehľadnosť sú každé stratégie vytvárajúce novú výpočtovú arénu označené rovnakou farbou. Pre koštrukciu kategórie pre výpočtové arény funkčného typu prevedieme ešte jednu ilustráciu na inom príklade.

□

Príklad B.

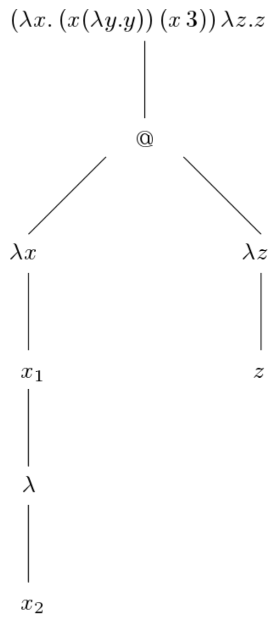
Pri ilustrácii použijeme term b.

$$b = (\lambda x.\,(x(\lambda y.y))\,(x\,3))\,\lambda z.z : ((Nat \to Nat) \to (Nat \to Nat)) \to Nat \tag{7.5}$$

Pre term b konšruujeme kategóriu $\mathscr{G}$ v rovnakých krokoch ako v predchádzajúcom príklade:

1. Konštrukcia herného stromu pre term b.
2. Konštrukcia výpočtových arén pre jednotlivé podtermy termu b.
3. Konštrukcia kategórie $\mathscr{G}$, ktorá bude obsahovať
   - výpočtové arény ako objekty,
   - stratégie ako morfizmy.

Herný strom pre term b je znázornený na nasledujúcom obrázku.

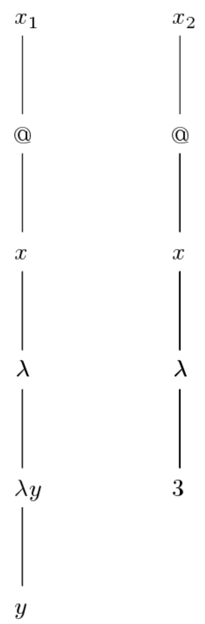


Obr. 7 – 6: Herný strom pre výpočtovú arénu b

Herný strom pre term b obsahuje substitúcie za podtermy, ktoré sú súčasťou aplikácie v ľavom podterme. Substitúciu znázorníme tak, že jednotlivé substituované termy zobrazíme v samostatných herných stromoch. Tieto herné stromy označíme x_1 a x_2, nakoľko ide o podtermy λ-abstrakcie λx. Subsituujeme nasledovne:

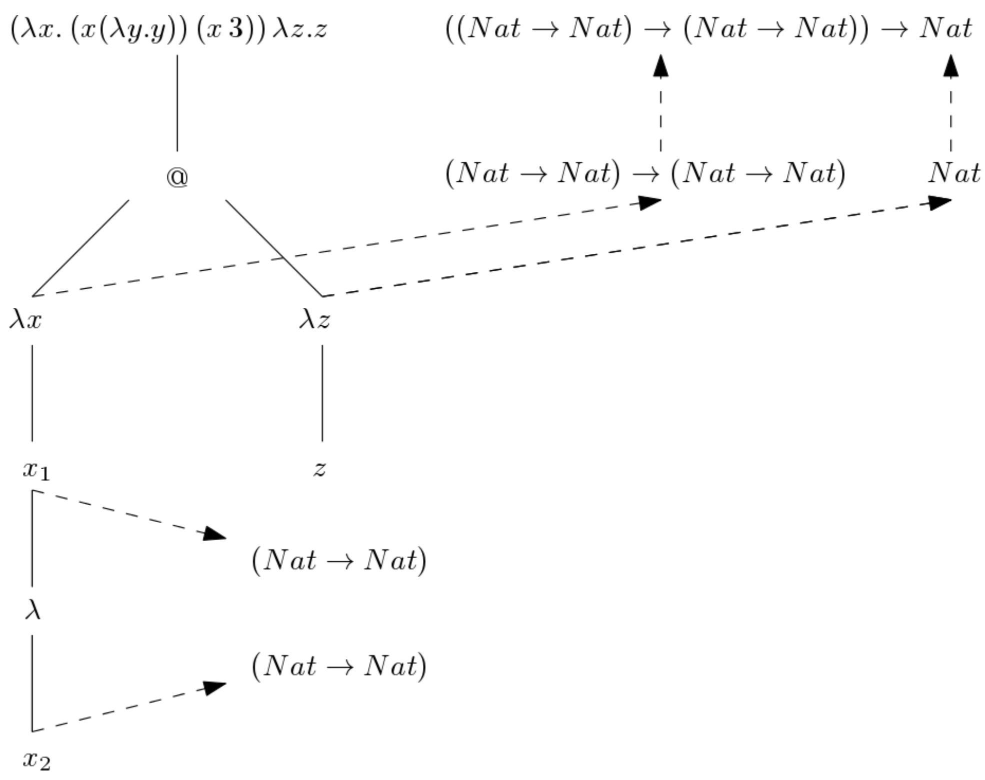
- $\lambda x.\,(x\,(\lambda y.y))\,(x\,3)$ je podterm na ľavej strane herného stromu,
- $x_1 = x\,(\lambda y.y)$ bude predstavovať substitúciu ľavej strany λ-abstrakcie λx,
- $x_2 = x\,3$ bude predstavovať substitúciu pravej strany λ-abstrakcie λx.

Na obrázku sú znázornené herné stromy pre jednotlivé podtermy x_1 a x_2 pre term b.



Obr. 7 – 7: Herné stromy pre podtermy x_1 a x_2 termu b

Podľa typov jednotlivých podtermov určíme typ pre celý term b.

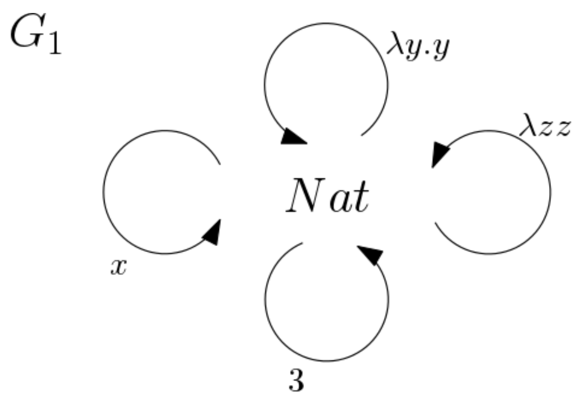


Obr. 7 − 8: Určenie typu pre výpočtovú arénu termu b

Konštruujeme výpočtovú arénu, ktorá obsahuje:

- typy Nat, $Nat \to Nat$ a $(Nat \to Nat) \to (Nat \to Nat)$,
- termy $\lambda y.y$, $x\,3$, $\lambda z.z$ a $\lambda x.\,(x\,(\lambda y.y))$.

Z dôvodu miery zložitosti tohto príkladu budeme substituovať časť výpočtovej arény, a síce typ Nat za označenie G_1. Typ Nat zobrazený vrátane svojich operácii na nasledujúcom obrázku.

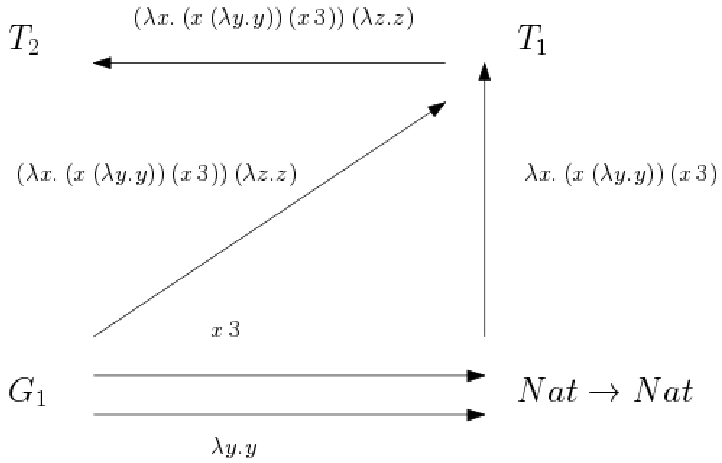


Obr. 7 − 9: Časť výpočtovej arény označená ako G_1

Výpočtovú arénu zobrazíme pomocou navrhnutej substitúcie na nasledujúcom obrázku. Z dôvodu zložitosti funkčných typov uvedieme nasledujúcu substitúciu:

$$T_1 = (Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat) \tag{7.6}$$

$$T_2 = ((Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)) \rightarrow Nat \tag{7.7}$$

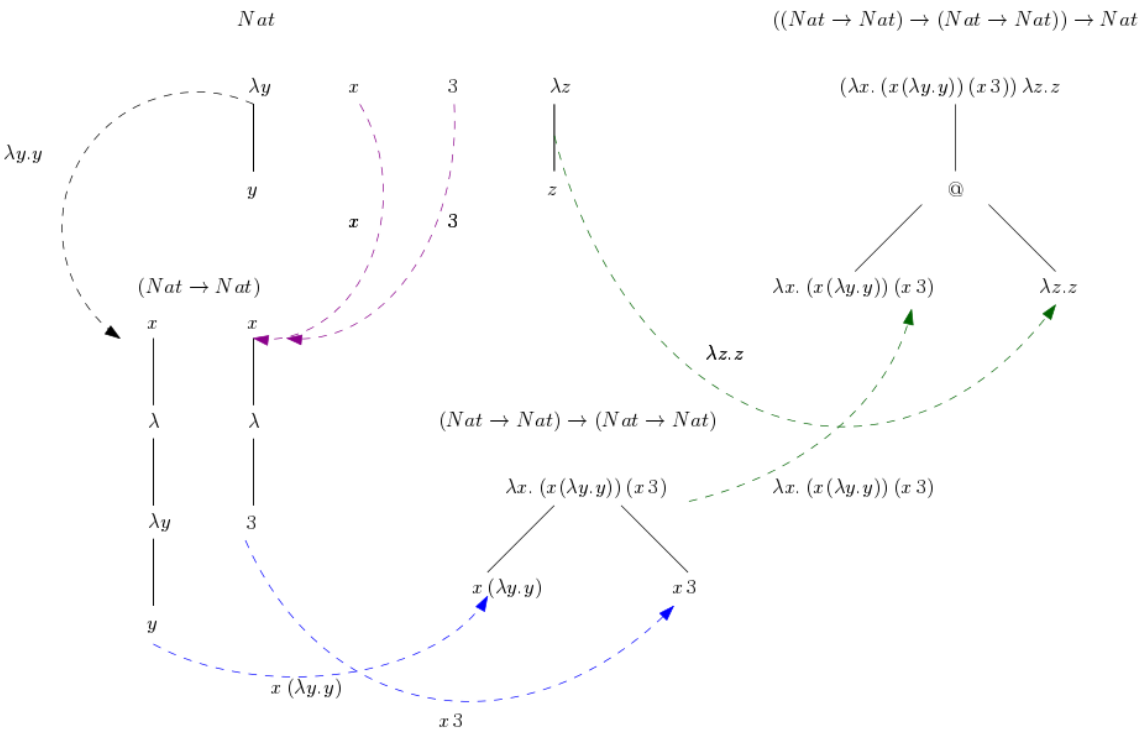


Obr. 7 − 10: Výpočtová aréna pre term b

Ako posledný krok budeme konštruovať kategóriu $\mathscr{G}$, ktorá obsahuje:

- objekty - výpočtové arény typu Nat, $Nat \rightarrow Nat$ a $(Nat \rightarrow Nat) \rightarrow (Nat \rightarrow Nat)$,
- morfizmy - stratégie $\lambda y.y$, $x\,3$, $\lambda z.z$ a $\lambda x.\,(x\,(\lambda y.y))$.

Kategória je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 7 – 11: Kategória $\mathscr{G}$ pre výpočtové arény funkčného typu

$\square$

V závere tejto podkapitoly možno zhodnotiť, že sme dokázali, že existuje jednoznačný postup konštrukcie kategórie, ktorá zobrazuje výpočet termu funkčného typu na báze výpočtových arén pomocou hernej sémantiky. V nasledujúcej podkapitole sa budeme venovať podobnej ilustrácii, avšak výpočtová aréna bude konštruovaná z termu súčinového typu.

7.2 Konštrukcia kategórie pre výpočtové arény súčinového typu

Podľa zdroja [22] musíme pri konštrukcii kategórie, kde je súčinový typ objektom, dodržať nasledujúcu podmienku.

Ak existuje v kategórii súčinový typ $T : T_1 \times T_2$ a objekt U s operáciami $q_1 : U \to T_1$

a $q_2 : U \rightarrow T_2$, potom existuje aj prídavná operácia $q : U \rightarrow T$ taká, že platia rovnosti $proj1 \circ q = q_1$ a $proj2 \circ q = q_2$. Kategória $\mathscr{C}$ vyzerá nasledovne:

$$\begin{tikzcd}
 & D \arrow[dl, "q_1"'] \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "q_2"] & \\
T_1 & T \arrow[l, "proj1"] \arrow[r, "proj2"'] & T_2
\end{tikzcd}$$

Obr. 7 – 12: Konštrukcia kategórie $\mathscr{C}$ výpočtovej arény súčinového typu

Prvkami súčinového typu môžu byť aj trojice až n-tice hodnôt daného typu. Príklad uvedený vyššie vieme transformovať do príkladu pre trojice. Teda konštruujeme kategóriu $\mathscr{C}$, ktorej objektom je súčinový typ $T_1 \times T_2 \times T_3$, kde T_1, T_2 a T_3 sú základné typy. Tak ako v predchádzajúcom príklade, aj tu musíme definovať projekcie, avšak v tomto prípade sú tri projekcie, ktoré označíme $proj1$, $proj2$ a $proj3$. Každá projekcia, teda morfizmus má svoj formálny zápis:

$$proj1 : T_1 \times T_2 \times T_3 \rightarrow T_1 \tag{7.8}$$

$$proj2 : T_1 \times T_2 \times T_3 \rightarrow T_2 \tag{7.9}$$

$$proj3 : T_1 \times T_2 \times T_3 \rightarrow T_3 \tag{7.10}$$

$$\begin{tikzcd}
 & T_1 \times T_2 \times T_3 \arrow[dl, "proj1"] \arrow[d, "proj2"] \arrow[dr, "proj3"] & \\
T_1 & T_2 & T_3
\end{tikzcd}$$

Obr. 7 – 13: Konštrukcia kategórie $\mathscr{C}$ pre tri projekcie

Na základe týchto kritérií a podmienok budeme postupovať pri konštrukcii kategórie, kde objektom je výpočtová aréna súčinového typu, teda produkt. Ilustrácia je uvedená na nasledujúcich príkladoch.

Príklad A.

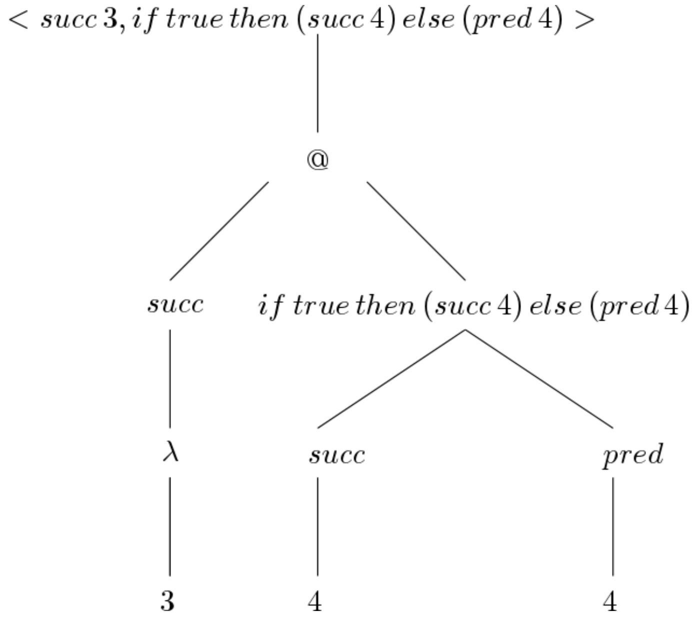
Pri ilustrácii použijeme term súčinového typu x.

$$x =< succ\,3, if\,true\,then\,(succ\,4)\,else\,(pred\,4) >: Nat \times (Bool \times Nat \times Nat) \quad (7.11)$$

Pre príklad, teda term x konšruujeme kategóriu $\mathscr{F}$ a budeme postupovať v nasledujúcich krokoch:

1. Konštrukcia herného stromu pre term x.
2. Konštrukcia herného stromu pre podtermy termu x a označenie typov pre jednotlivé časti podtermov.
3. Konštrukcia kategórie $\mathscr{F}$ pre term x, ktorá bude obsahovať
   - výpočtové arény ako objekty,
   - stratégie ako morfizmy.

Konštrukcia herného stromu pre term x je znázornená na nasledujúcom obrázku.



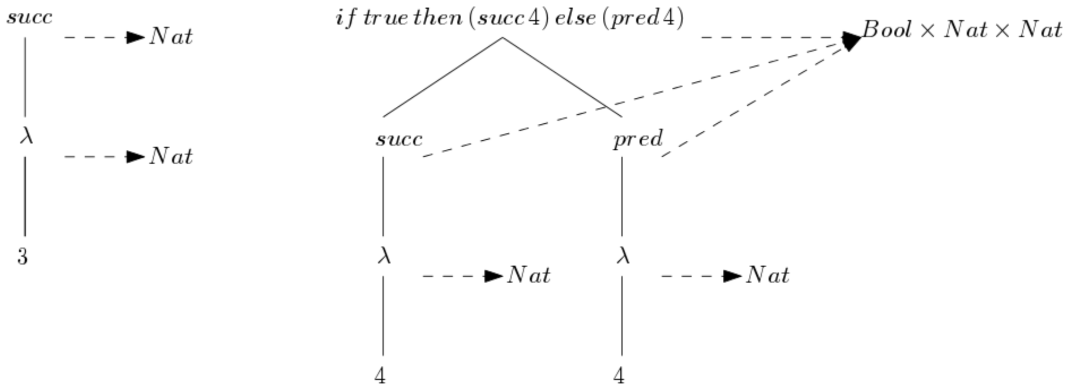
Obr. 7 – 14: Herný strom pre term x

Pri určovaní typov jednotlivých vetiev si celý herný strom rozdelíme na niekoľko podstromov.

$$x_1 = succ\,3 \tag{7.12}$$

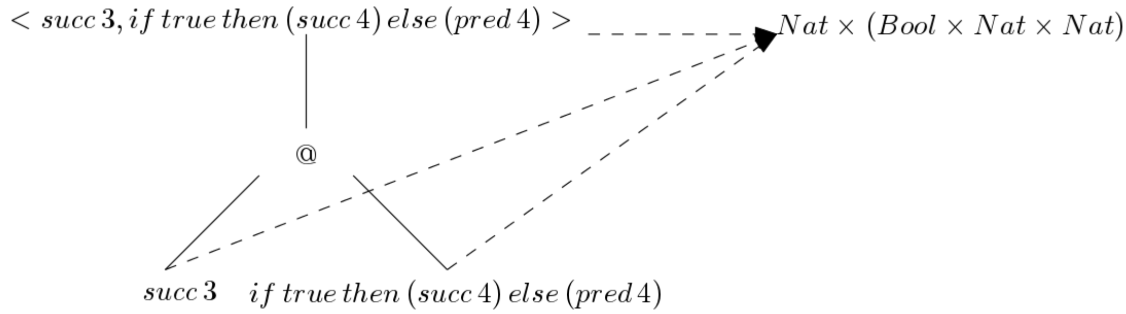
$$x_2 = if\,true\,then\,(succ\,4)\,else\,(pred\,4) \tag{7.13}$$

Pre jednotlivé podstromy znázorníme ich typy ako je to viditeľné na nasledujúcom obrázku.



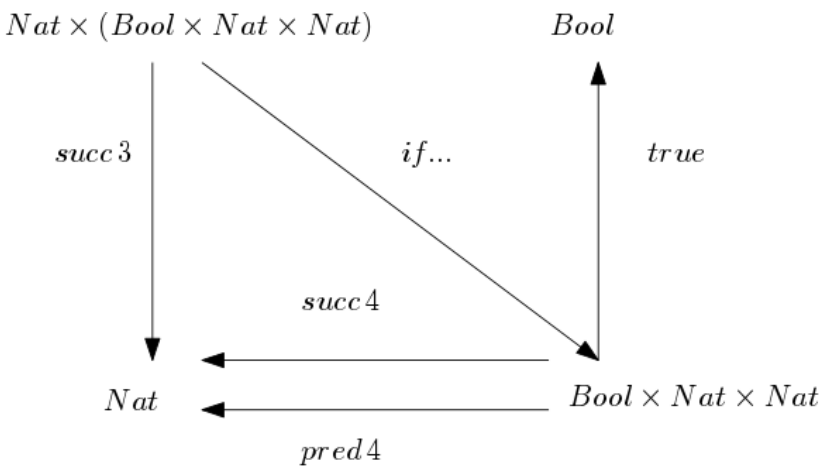
Obr. 7 – 15: Herné stromy pre vetvy termu x

Na nasledujúcom obrázku sú zaznačené typy pre celý term x.



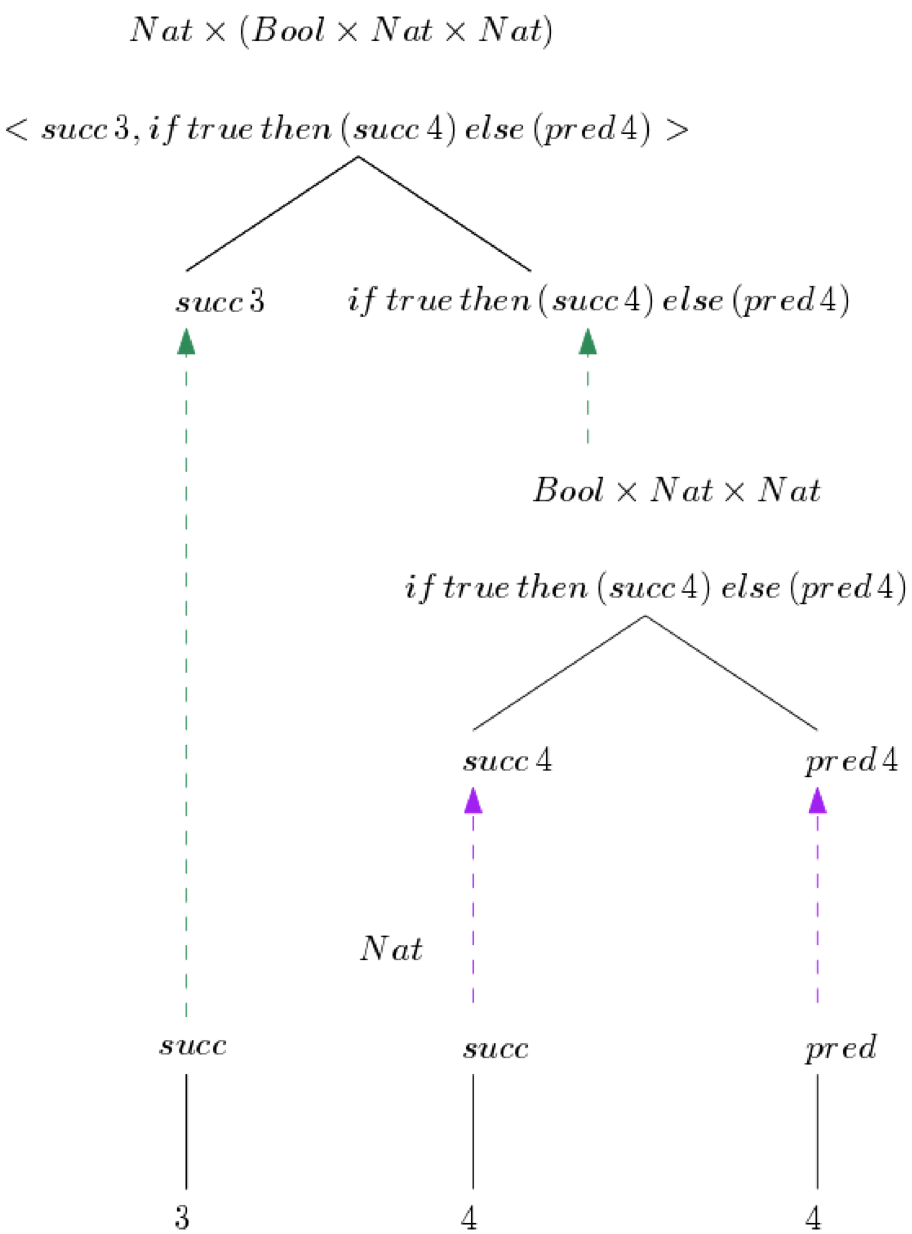
Obr. 7 − 16: Určenie typu pre term x

Po určení typu máme dané objekty, pre ktoré môžeme konštruovať kategóriu $\mathscr{F}$. Kategória je znázornená na nasledujúcom obrázku.



Obr. 7 − 17: Výpočtová aréna pre term x

Na nasledujúcom obrázku je znázornená kategória pre výpočtovú arénu súčinového typu.



Obr. 7 – 18: Kategória $\mathscr{F}$ výpočtovej arény súčinového typu

Kategória $\mathscr{F}$ obsahuje nasledujúce prvky:

- objekty - výpočtové arény typu Nat, $Bool$, $Bool \times Nat \times Nat$ a $Nat \times (Bool \times Nat \times Nat)$,
- morfizmy - stratégie $succ\,3$, $if\,true\,then\,(succ\,4)\,else\,(pred\,4)$, $succ\,4$ a $pred\,4$.

$\square$

Príklad B.

Pri ilustrácii použijeme term y.

$$y =< y_1, y_2 >: T \tag{7.14}$$

$$y_1 = if\,(iszero(pred\,1))\,then\,(\lambda xy.x)\,else\,(\lambda xy.y) : T_1 \tag{7.15}$$

$$y_2 = \lambda fz.\,(\lambda y.y)\,(f\,z) : T_2 \tag{7.16}$$

$$T = T_1 \times T_2 \tag{7.17}$$

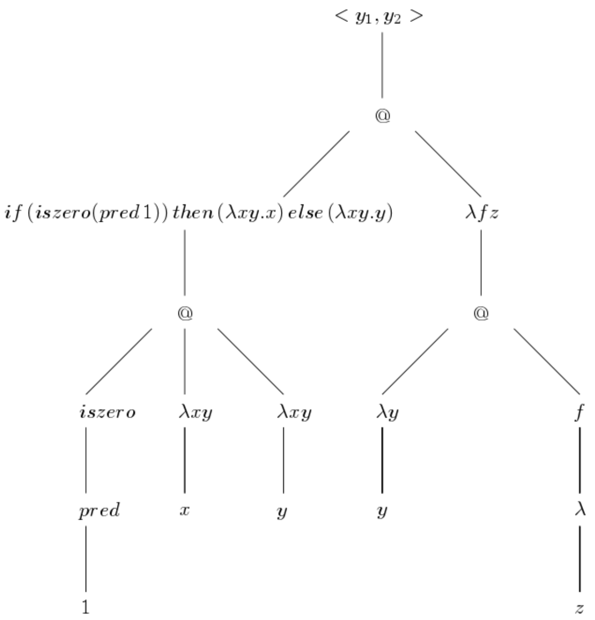
$$T_1 = (Nat \to Bool) \times (Nat \to Nat) \times (Nat \to Nat) \tag{7.18}$$

$$T_2 = Bool \to (Nat \to Nat) \tag{7.19}$$

Pre príklad, teda term y konštruujeme kategóriu $\mathscr{H}$ a budeme postupovať v nasledujúcich krokoch:

1. Konštrukcia herného stromu pre term y.
2. Konštrukcia herného stromu pre substitúcie podstromov y_1 a y_2 termu y a označenie typov pre jednotlivé časti podtermov.
3. Označenie typov pre herný strom termu y.
4. Konštrukcia kategórie $\mathscr{H}$ pre výpočtovú arénu termu y, ktorá bude obsahovať
    - typy ako objekty,
    - termy ako morfizmy.

Konštrukcia herného stromu pre term y je znázornená na nasledujúcom obrázku.



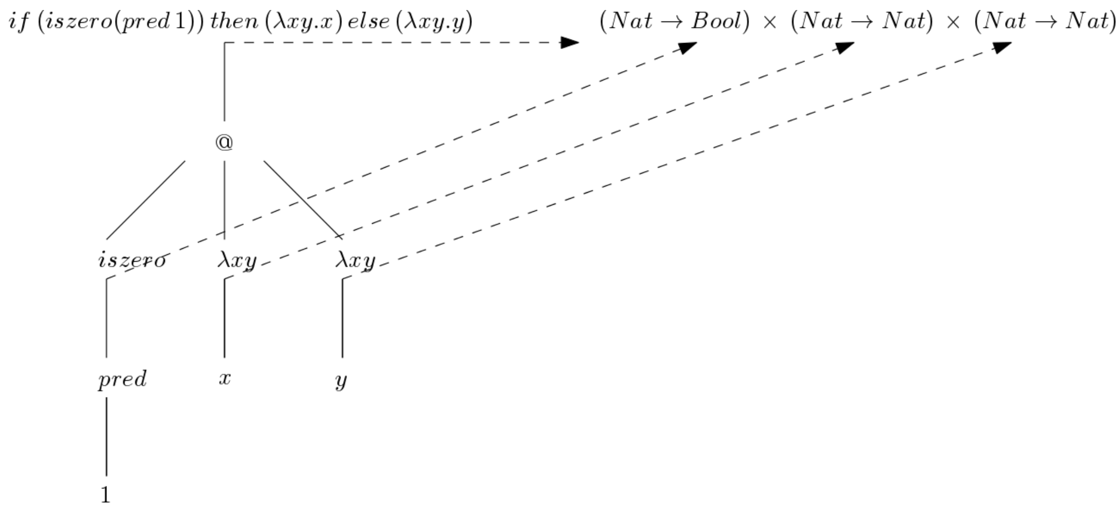
Obr. 7 − 19: Herný strom pre term y

Pri určovaní typov jednotlivých vetiev si celý herný strom rozdelíme na niekoľko podstromov.

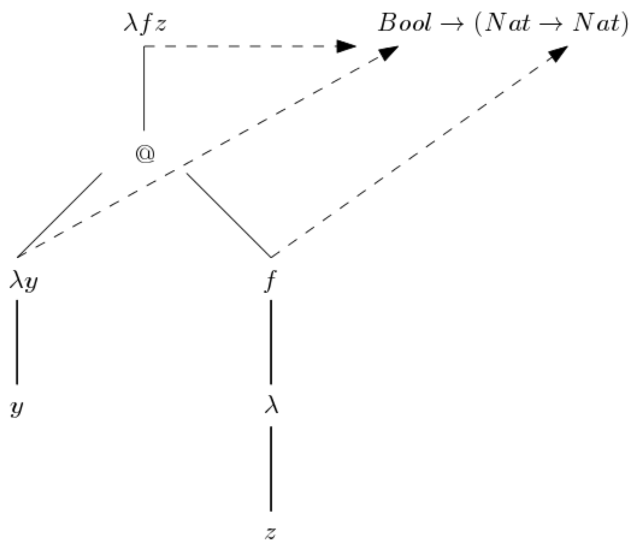
$$y_1 = if\,(iszero(pred\,1))\,then\,(\lambda xy.x)\,else\,(\lambda xy.y) \tag{7.20}$$

$$y_2 = \lambda fz.\,(\lambda y.y)\,(f\,z) \tag{7.21}$$

Pre jednotlivé podstromy znázorníme ich typy ako je to viditeľné na nasledujúcich obrázkoch.

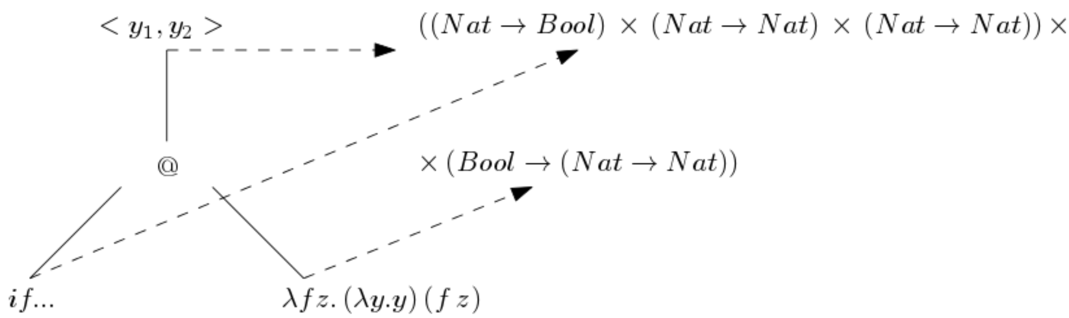


Obr. 7 – 20: Určenie typu termu y_1 z jeho herného stromu



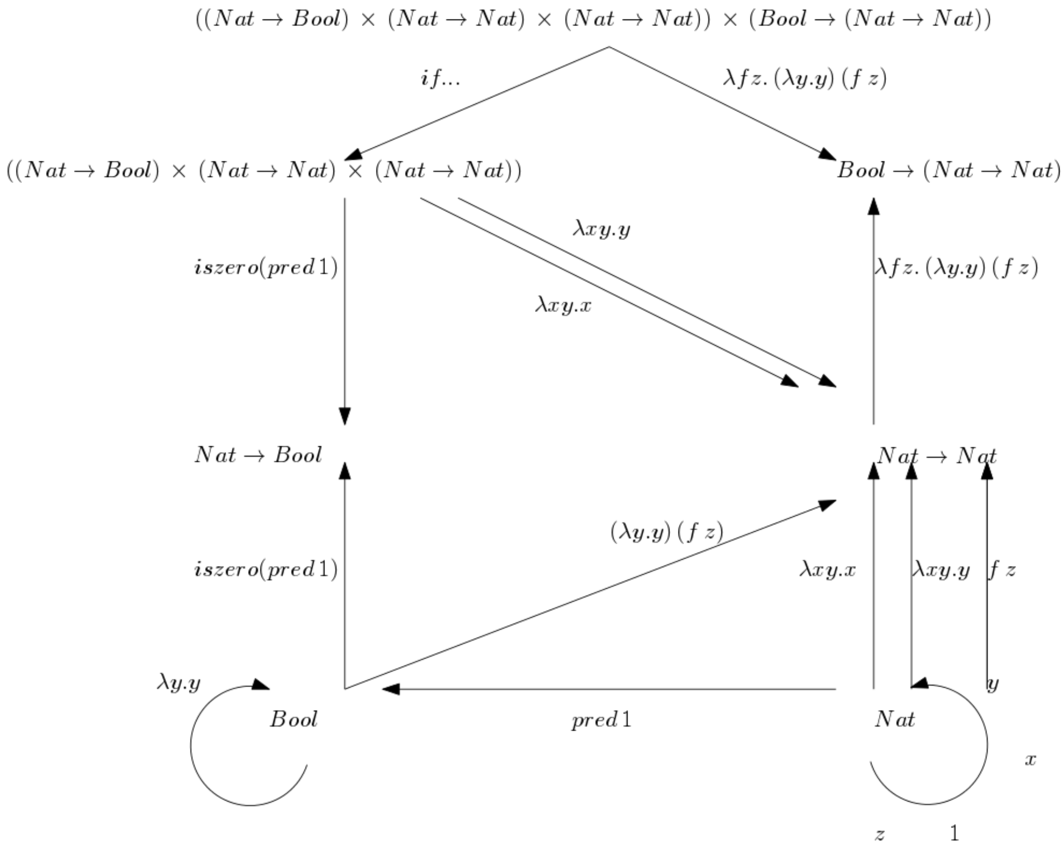
Obr. 7 – 21: Určenie typu termu y_2 z jeho herného stromu

Na nasledujúcom obrázku sú zaznačené typy pre celú výpočtovú arénu y.



Obr. 7 − 22: Určenie typu termu y z jeho herného stromu

Po určení typu máme dané objekty, pre ktoré môžeme konštruovať výpočtovú arénu a potom kategóriu $\mathscr{H}$.

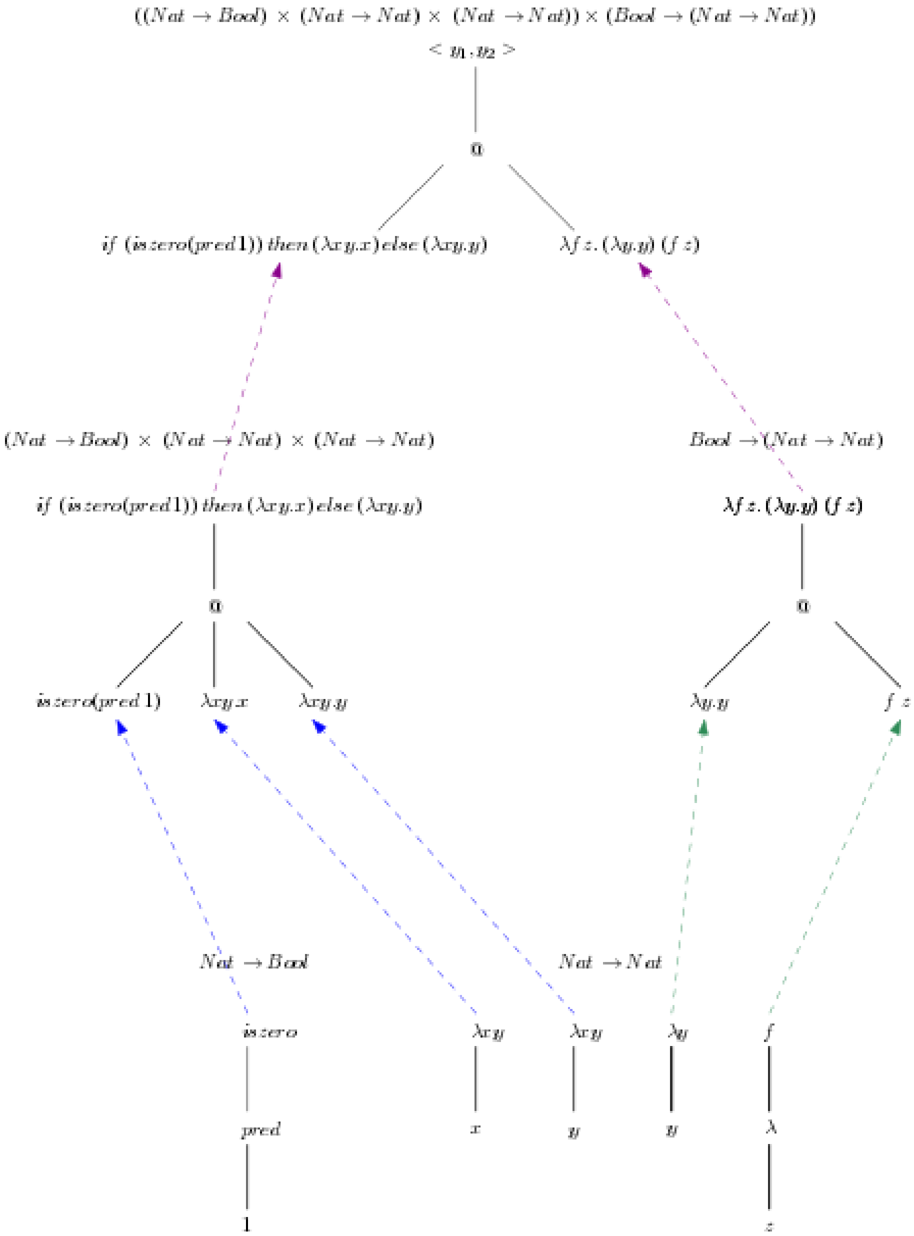


Obr. 7 − 23: Výpočtová aréna termu súčinového typu y

Kategória je znázornená na nasledujúcom obrázku.

Kategória $\mathscr{H}$ obsahuje nasledujúce prvky:

- objekty, teda výpočtové arény nasledujúcich typov:
  - Nat,
  - $Bool$,
  - $Nat \to Bool$,
  - $Nat \to Nat$,



Obr. 7 – 24: Kategória $\mathscr{H}$ výpočtovej arény termu y

  - $Bool \to (Nat \to Nat)$,
  - $(Nat \to Bool) \times (Nat \to Nat) \times (Nat \to Nat)$,
  - $((Nat \to Bool) \times (Nat \to Nat) \times (Nat \to Nat)) \times (Bool \to (Nat \to Nat))$,

- morfizmy, teda stratégie:
  - $pred\, 1$,
  - $iszero(pred\, 1)$,
  - $\lambda xy.x$,
  - $\lambda xy.y$,
  - $\lambda y.y$,
  - $f\, z$,
  - $(\lambda y.y)\, (f\, z)$,
  - $\lambda fz.(\lambda y.y)\, (f\, z)$,
  - $if\, (iszero(pred\, 1))\, then\, (\lambda xy.x)\, else\, (\lambda xy.y)$.

$\square$

Na záver kapitoly možno konštatovať, že sme ilustrovali navrhnutý postup riešenia na viacerých odlišných príkladoch. Podarilo sa nám ilustrovať návrh riešenia aj na príkladoch, kde sa nachádzali jednoduché typy, a to funkčný a súčinový vo vzájomnej kombinácii. V nasledujúcej kapitole budeme v rámci záverečnej fázy diplomovej práce hodnotiť jej výsledok a možné rozšírenia do budúcna.

8 Záver

Cieľom tejto diplomovej práce bolo dokázať, že herná sémantika je riešenie pre interpretáciu funkcionálnych programovacích jazykov, ktoré spája doteraz známe spôsoby interpretácie v programovacích jazykov, a síce denotačnú a operačnú sémantiku. Herná sémantika ponúka ako jednoznačný predpis a všeobecnú denotáciu daného termu, tak aj výpočet jej výslednej hodnoty, čo dokazuje, že hernú sémantiku možno považovať za spoľahlivý a inovatívny spôsob interpretácie funkcionálneho programovacieho jazyka.

V tejto diplomovej práci sa nachádza analýza existujúcich zdrojov rôznych autorov, ktorí sa zaoberajú výskumom hernej sémantiky a teórie hier v rôznych oblastiach. Medzi autorov popredných zdrojov tejto práce by som zaradila najmä Abramskeho, Hylanda, Onga a Bluma, z ktorých sa v tejto práce čerpalo prioritne v kapitolách, ktoré sa zaoberali analýzou hernej sémantiky ako celku. Do analytickej časti patrí aj λ-kalkul, ktorý slúžil ako jednoznačná a všeobecná reprezentácia funkcionálneho jazyka. Ďalšia kapitola bola venovaná kategóriám, ich terminológia a základné vlastnosti pre ich konštrukciu. V tejto kapitole boli použité mnohé zdroje, najmä kniha Kategorické štruktúry a ich aplikácie v informatike.

V tejto diplomovej práci bol vytvorený postup ako z λ-termu konštruovať herný strom, ďalej vyňať z herného stromu typovú anotáciu a použiť tieto typy ako objekty v kategórii. Tento postup bol jednoznačne popísaný v 5. a 6. kapitole. Tento postup bol aplikovaný na rôzne objekty, či už hovoríme o základných typoch λ-kalkulu alebo o zložitých typoch ako sú funkčné a súčinové typy. V predposlednej 7. kapitole sú ilustrované konkrétne príklady, kde je dodržaný navrhnutý postup riešenia, čo dokazuje, že riešenie je aj prakticky použiteľné. Príklady sú orientované najmä na súčinový a funkčný typ.

Táto diplomová práca má perspektívu na rozšírenie, najmä čo sa týka jednoduchých typov, nakoľko pre náročnosť nebol doteraz vytvorený postup pre súčtový typ. Ďalej vieme hernú sémantiku aplikovať na abstraktný stroj alebo pokračovať cestou kombinácie hernej sémantiky s rôznymi oblasťami logiky, čo sú oblasti, z ktorých je už teraz množstvo literatúry a sú to aktuálne preberané problematiky. Herná sémantika je zaujímavá v rôznych vedeckých oblastiach a poskytuje elegantné riešenie v mnohých odvetviach výskumu, nielen v informatike.

9 Zoznam literatúry

Literatúra

ABRAMSKY, S. 2010. *From CSP to Game Semantics* Berlin : Springer, 2010, ISBN 978-1-84882-922-4

BLASS, A. 1992. *A game semantics for linear logic. (1992)* In: Annals of Pure and Applied Logic'92. Ann Arbor : University of Michigan, 1992, pp. 183–220

BLUM, W. – ONG, C.-H. L. 2008. *A concrete presentation of Game Semantics. (2008)* In: Annals of Pure and Applied Logic'92. Ann Arbor : University of Michigan, 1992, pp. 183–220

ABRAMSKY, S. 2008. *Tutorial on Game Semantics* Oxford : Oxford University Computing Laboratory, 2008

DANOS, V. – HERBELIN, H. – REGNIER, L. 1996. *Game Semantics Abstract Machines. (1996)* Paris : CNRS-Université Paris 7, 1996. ISBN 1043-6871/96 pp. 394–405

ABRAMSKY, S. 2008. *Information, Processes and Games (2008)* In: Handbook of the Philosophy of Science. Amsterdam : Universiteit van Amsterdam, 2008.

EATWELL, J. – MILGATE, M. – NEWMAN, P. 1987. *Game Theory (1987)* In: The New Palgrave: A Dictionary of Economics, Volume 2. London 1987, pp. 460–482

GHICA, D. R. 2009. *Applications of Game Semantics: From Program Analysis to Hardware Synthesis. (2009)* Birmingham : School of Computer Science, University of Birmingham, 2009.

HYLAND, M. 2000. *On Full Abstraction for PCF. (2000)* Cambridge : University of Cambridge.

HOUSTON, R. 2003. *Categories of Games (2003)* Manchester : University of Manchester, 2003.

BYUN, S. 2003. *Introduction to Linear Logic and Game Semantics (2003)* Busan : Kyungsung University, 2003.

HYLAND, M. 1997. *Game Semantics (1997)* Cambridge : University of Cambridge , pp. 131–183

LANGLOIS, J.-P. P. 2002. *Applicable Game Theory (2002)* San Francisco : San Francisco State University.

ABRAMSKY, S. 2009. *Semantics of Interaction (2009)* Oxford : Oxford University Computing Laboratory, 2008.

NOVITZKA, V. – STEINGARTNER, W. 2010. *Kategorické štruktúry a ich aplikácie v informatike (2010)* Košice : Technická Univerzita v Košiciach, 2010. ISBN 978-80-89284-67-2 pp. 13–98

BARR, M. – WELLS, CH. 1998. *Category theory for computing science* Michigan : Michiganská univerzita, 1998. ISBN 978-01-33238-09-9

BARENREGT, H. 2013. *Lambda Calculus with Types* Cambridge : Cambridge university, 2013. ISBN 978-0-521-766-142

NIPKOW, T. 1998. *Lambda Calculus* Vorlesung

NOVITZKA, V. – MIHALYI, D. 2015. *Teória typov* Košice : Technická Univerzita v Košiciach, 2015. ISBN 978-80-553-1950-6

GIANANTONIO, P. D. – HONSELL, F. – LENISA, M. 2008. *A type assignment system for game semantics* Udine : Universita di Udine, Italy, 2008. Dostupné na internete: https://users.dimi.uniud.it/ pietro.digianantonio/papers/copy˙pdf/ictcs.pdf

ROJAS, R. 1998. *A Tutorial Introduction to the Lambda Calculus* Berlin :

FU, Berlin, 1998. Dostupné na internete: http://www.inf.fu-berlin.de/inst/ag-ki/rojas˙home/documents/tutorials/lambda.pdf

SLONNEGER, K. – KURTZ, B. 1995. *Formal Syntax and Semantics of Programming Languages* Louisiana : Louisiana Tech University, 1995. ISBN 0-201-65697-3

AWODEY, S. 2010. *Category Theory* Pittsburgh : Carnegie Mellon University, 2010. ISBN 978–0–19–923718–0

TURI, D. 2001. *Category Theory Lecture Notes* Edinburgh : University of Edinburgh, 2001. Dostupné na internete: http://www.dcs.ed.ac.uk/home/dt/CT/categories.pdf

OOSTEN, J. V. 2001. *Basic Category Theory* Utrecht : Department of Mathematics, Utrecht University, The Netherlands, 2001. Dostupné na internete: http://www.staff.science.uu.nl/ ooste110/syllabi/catsmoeder.pdf

OOSTEN, J. V. 2016. *Category Theory* Cambridge : University of Cambridge, 2016. Dostupné na internete: http://www.logicmatters.net/resources/pdfs/GentleIntro.pdf

PRISNER, E. 2014. *Game Theory through examples* Sorengo : Franklin University Switzerland, 2014. ISBN 978-1-61444-115-1

PITTS, A. M. 2002. *Semantics of Programming Languages* Cambridge : University of Cambridge, 2002. Dostupné na internete: http://www.inf.ed.ac.uk/teaching/courses/lsi/sempl.pdf

SEWELL, P. 2009. *Semantics of Programming Languages* Cambridge : University of Cambridge, 2009. Dostupné na internete: http://www.cl.cam.ac.uk/teaching/0809/Semantics/notes-mono.pdf

10 Prílohy

Príloha CD médium – záverečná práca v elektronickej podobe..