PŘÍRODOVĚDECKÁ FAKULTA UNIVERZITY PALACKÉHO
KATEDRA INFORMATIKY

DIPLOMOVÁ PRÁCE

Alternativní sémantika pro atributové implikace

2014 Jan Tříska

Anotace

Práce se zabývá úplnou axiomatizací atributových implikací, které popisují závislosti mezi atributy objektů, které se mění v po sobě jdoucích časových okamžicích. Tyto atributové implikace jsou pravidla ve tvaru když-pak vyjadřující přítomnost atributů objektů relativně v čase. Jejich význam je určen na základě výskytu nebo absence atributů objektů v po sobě jdoucích časových okamžicích. Prezentovaná axiomatizace je rozšířením klasické Armstrongovy úplné axiomatizace atributových implikací o časové okamžiky. Klasický případ je pak speciální případ tohoto rozšíření, kdy se uvažuje pouze jeden časový okamžik.

Chtěl bych poděkovat doc. RNDr. Vilému Vychodilovi, Ph.D. za trpělivost a čas, který mi věnoval, a také za rady a pomoc se zpracováním této práce.

Obsah

1. Úvod

V práci je popsán úplný axiomatický systém pravidel ve tvaru když-pak, které vyjadřují vztahy mezi atributy objektů, které se mění v po sobě jdoucích časových okamžicích. Tato pravidla úzce souvisí s atributovými implikacemi, kterými se zabývá formální konceptuální analýza [7], ale obsahují prvek, kterým jsou schopny vyjádřit výskyt nebo absenci objektových atributů relativně v čase. Navíc z pohledu toho, že objekty můžou měnit své atributy v průběhu času, jsou tato pravidla v průběhu času zachována. Práce vymezuje tyto závislosti, jejich význam a ukazuje axiomatizaci sémantického vyplývání, která vychází z Armstrongovy axiomatizace [2].

Hlavní záměr byl předpovídat vývoj systému v čase na základě historických dat. Jednotlivé stavy systému jsou zaznamenávány v diskrétních okamžicích a jsou popsány atributy. Předpověď je pak na základě pravidel ve tvaru když-pak, které se relativně odkazují na atributy v jiných stavech a tato pravidla jsou zachována pro každý absolutní čas. Nakonec se ukázalo, že se na tento problém lze dívat jako na atributové implikace z formální konceptuální analýzy (FCA), kde se vhodně přidá prvek času.

Připomeňme si tedy nejprve atributové implikace a některé pojmy z FCA. Vstupem FCA je binární relace $I \subseteq X \times Y$ mezi objekty X a atributy Y, které se říká formální kontext. Ta se často zobrazuje ve formě tabulky, kde řádky odpovídají objektům, sloupce atributům a křížek/prázdné místo v tabulce značí, jestli objekt má/nemá daný atribut. Hlavní výstup FCA je množina dvojic shluků ve vstupních datech, kterým se říká formální koncepty v I. Formální koncept je dvojce $\langle A, B \rangle$, kde pro $A \subseteq X$ (nazývanou extent) a $B \subseteq Y$ (nazývanou intent) platí, že B je množina atributů, které mají všechny objekty z A a obráceně A je množina objektů, které mají všechny atributy z B. V tabulce příslušící I jsou formální koncepty největší obdélníky skládající se z křížků. Hlavní věta FCA [7] říká, že pokud všechny formální koncepty I uspořádáme podle množinové inkluze na extentech, pak dostaneme strukturu nazývanou konceptuální svaz, který je úplným svazem. Navíc její druhá část říká, že k libovolnému úplnému svazu existuje formální kontext tak, že daný svaz je jeho konceptuálním svazem. Atributová implikace nad atributy z Y daného formálního kontextu je pak výraz ve tvaru $A \Rightarrow B$, kde $A, B \subseteq Y$ a vyjadřuje závislost: „Pokud má objekt všechny atributy z A, pak má i všechny atributy z B“. Proto v užším slova smyslu bychom se mohli na $A \Rightarrow B$ dívat jako na výrokovou formuli ve tvaru implikace mezi konjunkcemi atributů z Y (které jsou brány jako výrokové proměnné). Pro $A, B, M \subseteq Y$ řekneme, že $A \Rightarrow B$ je pravdivá v M pokud platí, že když $A \subseteq M$, pak i $B \subseteq M$ a tento fakt značíme $M \models A \Rightarrow B$. Pokud pak uvažujeme, že M_x je množina všech atributů, které má objekt x v I, tedy $M_x = \{y \in Y \mid \langle x, y \rangle \in I\}$, pak $M_x \models A \Rightarrow B$ je skutečně formalizace významu $A \Rightarrow B$ je pravdivá pro atributy objektu x, tedy pokud má x všechny atributy z A, pak x má i všechny atributy z B. Jako příklad vstupu může být binární relace mezi zákazníky supermarketu a věcmi, které si mohou zákazníci koupit viz. tabulku 1. První řádek pak znamená, že pan Novák si koupil chleba a sýr. Dále můžeme uvažovat atributovou implikaci $\{\text{sýr}\} \Rightarrow \{\text{chleba}\}$, která je pravdivá pro všechny zákazníky, a nebo atributovou implikaci $\{\text{chleba}\} \Rightarrow \{\text{sýr}\}$, která není pravdivá pro zákazníka Utíkal, protože si koupil chleba, ale nekoupil si k tomu sýr.

zákazník	chleba	mléko	pivo	sýr
Novák	×			×
Malá		×		
Utíkal	×		×	
Krátký	×			×

Tabulka 1. Nákupy zákazníků

Jedním ze zájmů FCA je stručně popsat množinu všech atributových implikací, které jsou splněné všemi objekty daného formálního kontextu. Hlavní přístup [8] k tomuto problému se soustředí na nalezení neredundantní množiny atributových implikací, ze které vyplývají přesně všechny atributové implikace, které jsou splněny v daném formálním kontextu. Klíčový je tedy pojem vyplývání atributových implikací. Jako v jiných logických systémech můžeme uvažovat dva základní typy vyplývání, a to sémantické, které je založeno na modelech, a syntaktické, které je založené na dokazatelnosti. Množině $M \subseteq Y$ říkáme model množiny Σ atributových implikací, pokud každá $A \Rightarrow B \in \Sigma$ je pravdivá v M. Dále $C \Rightarrow D$ sémanticky plyne ze Σ, psáno $\Sigma \models C \Rightarrow D$, pokud $C \Rightarrow D$ je pravdivá ve všech modelech Σ. Sémantické vyplývání atributových implikací má úplnou axiomatizaci, což znamená, že existuje inferenční systém tak, že $\Sigma \models A \Rightarrow B$ právě, když $A \Rightarrow B$ lze odvodit z formulí ze Σ, psáno $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$. Dobře známým úplným axiomatickým systémem atributových implikací je Armstrongův inferenční systém [2].

Pro daný formální kontext $I \subseteq X \times Y$ nazýváme množinu formulí Σ úplnou v I, pokud ze Σ lze dokázat $A \Rightarrow B$ právě, když $A \Rightarrow B$ je pravdivá pro všechny objekty v I. Navíc Σ se nazývá neredundantní, pokud žádná ostrá podmnožina už není v I úplná. Jedním příkladem neredundantní úplné množiny mohou být takzvané Guigues-Duquennovy báze [8], které jsou navíc minimální vzhledem k počtu formulí, které obsahují. Například ve formálním kontextu znázorněném v tabulce 1. neredundantní a úplná množina formulí obsahuje pouze atributové implikace $\{\text{sýr}\} \Rightarrow \{\text{chleba}\}$ a $\{\text{pivo}\} \Rightarrow \{\text{chleba}\}$.

V práci jsou rozšířeny předchozí úvahy tím, že se bere jako vstupní data posloupnost formálních kontextů, které vzniknou zaznamenáváním atributů objektů v po sobě jdoucích časových okamžicích, kterým budeme říkat časy. Jako příklad vezměme záznamy počasí ve městech Praha a Ostrava viz. tabulku 2., kde časy mohou být například dny. Zde nás pak zajímají závislosti mezi atributy

$t = 1$

místo	déšť	slunce	zima	teplo
Praha	×			×
Ostrava		×		×

$t = 2$

místo	déšť	slunce	zima	teplo
Praha	×		×	
Ostrava	×		×	

$t = 3$

místo	déšť	slunce	zima	teplo
Praha			×	
Ostrava	×		×	

Tabulka 2. Záznamy počasí ve městech v po sobě jdoucích dnech

relativně v čase, tedy například „jestliže dnes prší, pak zítra bude zima“, kde pojmy dnes a zítra odkazují na časy relativně k současnému času. Můžeme tedy uvažovat pravidla ve tvaru

$$\{y_1^{i_1}, \ldots, y_n^{i_n}\} \Rightarrow \{z_1^{j_1}, \ldots, z_m^{j_m}\}, \tag{1}$$

kde $y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m$ jsou atributy z Y, které mají stejný účel jako u klasických atributových implikací a $i_1, \ldots, i_n, j_1, \ldots, j_m$ jsou celá čísla vyjadřující čas relativně k současnému okamžiku. Tedy 0 můžeme chápat jako současný okamžik (dnes), -1 jako předchůdce 0 (včera), 1 jako následníka 0 (zítra), atd. Pro danou posloupnost formálních kontextů je pak zajímavé zkoumat, kdy jsou pravidla jako (1) splněna ve všech časech nebo v daném rozsahu časů. Pokud by se taková pravidla určila z dat, pak by se dala použít k předpovědi blízké budoucnosti, tedy k předpověďi atributů v časech za posledním zaznamenaným formálním kontextem. Jako příklad vezmeme pravidlo $\{\text{prší}^{-1}\} \Rightarrow \{\text{zima}^0\}$, které je pravdivé pro všechny objekty v časech $t = 1, 2, 3$ a pravidlo $\{\text{slunce}^0\} \Rightarrow \{\text{teplo}^1\}$, které není pravdivé v čase 1.

V této práci jsou formalizována pravidla ve tvaru (1) a sémantickému vyplývání je přiřazen význam tak, jak byl právě popsán, a pak se práce soustředí na axiomatizaci. Tak jako pro klasické atributové implikace existuje i pro tato pravidla systém odvozovacích pravidel v Armstrongově stylu, který je úplný vzhledem k uvedenému sémantickému vyplývání.

2. Související přístupy

Na vstupní data, která uvažujeme, se můžeme také dívat jako na triadický formální kontext [10], kde podmínky odpovídají časovým okamžikům. V triadické

FCA už byly přístupy, které se zabývaly atributovými implikacemi [6], nicméně jsou koncepčně a technicky jiné než ty, které jsou popsány v této práci. Triadický formální kontext je struktura $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I \rangle$, kde $I \subseteq X \times Y \times Z$ je relace mezi objekty X, atributy Y a podmínkami Z. Triadický kontext může být chápán jako množina tabulek, které jsou stejné jako u FCA, kde každá z nich udává jaké mají objekty atributy při dané podmnínce ze Z. Atributová implikace uvažovaná v [6] je pak výraz ve tvaru $A \Rightarrow_C B$, jehož význam je „pokud má objekt při všech podmnínkách z C všechny atributy z A, pak má při všech podmnínkách z C i všechny atributy z B“. Pokud bychom brali podmínky jako časy, pak by tyto závisloti byly omezeny pouze na konkrétní časy. Navíc nedokáží vyjádřit, že atributy objektu při jedné podmínce implikují atributy objekty při druhé podmínce. V kapitole 5. je pak podrobně rozebráno, jak by vypadala fomalizace formulí ve tvaru (1) v triadickém formálním kontextu.

V kontextu asociačních pravidel [1] byly podobné závislosti již studovány jako mezitransakční asociační pravidla [12, 14, 11, 5, 9]. Asociační pravidla formule ve tvaru $A \Rightarrow B$ a jsou interpretována v tabulkách, kde řádkům se říká transakce, sloupcům položky a křížek/prázné místo v tabulce značí, jestli v transakci je/není přítomna daná položka. Tabulky lze chápat jako formální kontexty. Asociační pravidla mají v tabulce skoro stejný význam jako atributové implikace ve formálním kontextu, ale obsahují navíc čísla support a confidence, kde support vyjadřuje kolik procent celkového počtu transakcí má všechny položky z A a confidence vyjadřuje kolik procent transakcí, které mají všechny položky z A mají i všechny položky z B. Pokud u asociačního pravidla je číslo confidence rovno 100, pak ho můžeme chápat jako atributovou implikaci. U mezitransakčních pravidel jsou transakce tabulek, ve kterých se intepretují, označeny celými čísly [14] nebo celočíselným vektorem [12, 11, 5]. Čísla můžeme chápat jako čas nebo vzdálenost v prostoru. Pokud budeme brát transakce jako záznamy stavu systému, pak daná tabulka je záznamem vývoje systému v čase (prostoru) nebo také například v čase i prostoru, pokud jsou transakce označeny vektory. Ale to je jen nepodstatný detail týkající se interpretace. Mezitransakční asociační pravidla, jak už název napovídá, obsahují v předpokladu a důsledku položky označené nezáporným celým číslem nebo nezáporným celočíselným vektorem, který se relativně odkazuje na jinou transakci. Každé pravidlo je normované, tedy musí obsahovat nějakou položku s číslem 0 nebo s nulovým vektorem. Navíc u každého pravidla lze najít největší číslo nebo největší čísla u každé složky vektoru, které udávají posuvné okno. Pro dané pravidlo lze pak tabulku rozložit na množinu podtabulek, kde každá se vleze do posuvného okna. Číslo support pak udává kolik procent podtabulek obsahuje předpoklad pravidla vzhledem k celkovému počtu podtabulek a číslo confidence udává kolik procent podtabulek, které obsahují předpoklad obsahují i důsledek. Přístupy se zabývají hlavně algoritmy na určení těchto závislostí z dat. Prakticky byla mezitransakční asociační pravidla aplikována na předpovídání kurzů cen na burze [12], předpovídání počasí v Hong Kongu [5] a zjištění časových závislostí mezi slaností a teplotou moře poblíž Taiwanu [9]. Tato pravidla by mohla být v podobném vztahu k námi uvažovaným pravidlům, jako klasická asociační pravidla ke klasickým atributovým implikacím.

3. Formule a sémantické vyplývání

Kapitola se věnuje formalizaci formulí, jejich významu a sémantickému vyplývání. Předpokládejme, že množina atributů Y je neprázdná a konečná a celá čísla budou značit časové okamžiky (časy). Důvod použití celých čísel jako časy je, že vstupní data jsou ve formě formálních kontextů zaznamenaných v diskrétních okamžicích a je jich pouze konečně mnoho, a proto je toto označení postačující. Pak definujeme množinu

$$\mathcal{T}_Y = \{y^i \mid y \in Y \text{ a } i \in \mathbb{Z}\}, \tag{2}$$

kde každý prvek $y^i \in \mathcal{T}_Y$ je *atribut y v čase i* (na $\mathcal{T}_Y$ se můžeme dívat jako na kartézský součin $Y \times \mathbb{Z}$). Pak pravidla ve tvaru (1) formalizujeme následovně:

Definice 3.1. *Časová implikace* je formule ve tvaru $A \Rightarrow B$, kde A, B jsou konečné podmnožiny $\mathcal{T}_Y$.

Časy atributů v předpokladu a důsledku časových implikací mají vyjadřovat čas relativní k času aktuálnímu. Zamýšlený význam časové implikace $A \Rightarrow B$ je tedy: Pro všechny časy t, pokud má objekt všechny atributy z A, kde t bereme jako aktuální čas, pak objekt má i všechny atributy z B, kde t bereme jako aktuální čas.

Jelikož chceme, aby formule platila pro všechny konkrétní časy, je potřeba relativní časy předpokladu i důsledku formule posunout do konkrétních časů. Proto zavádíme následující pojem:

Definice 3.2. *Posunutím množiny $M \subseteq \mathcal{T}_Y$ o čas j*, psáno $M + j$, budeme rozumět přičtení j k času každého atributu v M, tedy

$$M + j = \{y^{i+j} \mid y^i \in M\}.$$

Pro složitější výrazy budeme uvažovat, že $M+j+i$ bude zkratka za $(M+j)+i$, aby byl zápis jednodušší. Dále ještě budeme výrazem $M - j$ označovat množinu $M + (-j)$. Nyní uvedeme některé vlastnosti posunutí.

Věta 3.1. (monotonie) *Pro každé $A, B \subseteq \mathcal{T}_Y$ a čas i platí, že*

$$\textit{pokud } A \subseteq B, \textit{ pak } A + i \subseteq B + i.$$

Důkaz. Předpokládejme $A \subseteq B$ a vezmeme libovolný $y^{a+i} \in A+i$. Jelikož $y^a \in A$, pak z předpokladu plyne, že $y^a \in B$, a tedy $y^{a+i} \in B + i$. □

Věta 3.2. (distributivita) *Mějme systém množin $N_j \subseteq \mathcal{T}_Y (j \in J)$ a čas i. Pak platí následující:*

$$\bigcap_{j\in J} N_j + i = \bigcap_{j\in J}(N_j + i).$$

Důkaz.

$$\bigcap_{j\in J} N_j + i = \{y^{a+i} \,|\, y^a \in \bigcap_{j\in J} N_j\} = \bigcap_{j\in J}\{y^{b+i} \,|\, y^b \in N_j\} = \bigcap_{j\in J}(N_j + i)$$

□

Věta 3.3. (asociativita) *Pro každou $M \subseteq \mathcal{T}_Y$ a časy i, j platí*

$$(M + i) + j = M + (i + j).$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}(M + i) + j &= \{y^{a+j} \,|\, y^a \in (M + i)\} = \{y^{(b+i)+j} \,|\, y^b \in M\} \\ &= \{y^{b+(i+j)} \,|\, y^b \in M\} \\ &= M + (i + j)\end{aligned}$$

□

Nyní definujeme význam časové implikace.

Definice 3.3. Časová implikace $A \Rightarrow B$ *je pravdivá* v $M \subseteq \mathcal{T}_Y$, pokud pro každý čas i platí, že

$$\text{jestliže } A + i \subseteq M, \text{ pak } B + i \subseteq M \tag{3}$$

a tento fakt značíme $M \models A \Rightarrow B$.

Poznámka. (a) Všimněme si, že na základě monotonie posunutí (věta 3.1.) můžeme ekvivalentně vyjádřit (3) jako

$$\text{jestliže } A \subseteq M - i, \text{ pak } B \subseteq M - i.$$

Tedy místo posouvání předpokladu a závěru časové implikace můžeme posouvat M.

(b) $A \Rightarrow B$ *není pravdivá* v M, psáno $M \not\models A \Rightarrow B$, právě, když existuje i tak, že $A + i \subseteq M$, ale $B + i \nsubseteq M$. Čas i tedy slouží jako protipříklad.

(c) Pokud by se v množinách A, B a M vyskytovaly pouze atributy v čase 0, pak by $M \models A \Rightarrow B$ byla klasická pravdivost atributové implikace, tedy pokud $A \subseteq M$, pak $B \subseteq M$.

Všimněme si, že časové implikace $A \Rightarrow B$, pro které platí $B \subseteq A$, jsou pravdivé ve všech podmnožinách $\mathcal{T}_Y$.

Věta 3.4. *Pro každou množinu $M \subseteq \mathcal{T}_Y$ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$ takovou, že $B \subseteq A$, platí, že*

$$M \models A \Rightarrow B.$$

Důkaz. Vezměme libovolnou množinu $M \subseteq \mathcal{T}_Y$ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$ takovou, že $B \subseteq A$. Abychom ukázali, že platí $M \models A \Rightarrow B$ stačí ukázat, že pro každý čas i, pro který je $A + i \subseteq M$ platí, že i $B + i \subseteq M$. Vezmeme tedy libovolný čas i a předpokládejme, že $A + i \subseteq M$. Z předpokladu víme, že $B \subseteq A$, a tedy z monotonie posunu (věta 3.1.) dostaneme $B + i \subseteq A + i$. To ale znamená, že i $B + i \subseteq M$. □

Dále také existuje množina, ve které jsou pravdivé všechny časové implikace. Další věta říká, že touto množinou je $\mathcal{T}_Y$.

Věta 3.5. *Pro každou časovou implikaci $A \Rightarrow B$ platí, že*

$$\mathcal{T}_Y \models A \Rightarrow B.$$

Důkaz. Vezměme libovolnou časovou implikaci $A \Rightarrow B$ a ukážeme, že $\mathcal{T}_Y \models A \Rightarrow B$, tedy pro každý čas i, pro který je $A + i \subseteq \mathcal{T}_Y$ musí platit být i $B + i \subseteq \mathcal{T}_Y$. Vezmeme tedy libovolný čas i a budeme předpokládat, že $A + i \subseteq \mathcal{T}_Y$. Jelikož ale $B \subseteq \mathcal{T}_Y$, pak nutně platí i $B + i \subseteq \mathcal{T}_Y + i = \mathcal{T}_Y$ díky monotonii posunu (věta 3.1.) a definici $\mathcal{T}_Y$, což je ale to, co jsme chtěli dokázat. □

Množinu M, ve které vyhodnocujeme $A \Rightarrow B$, můžeme brát jako reprezentaci atributů jednoho objektu, který se mění v čase. A tedy k ospravedlnění zamýšleného významu můžeme vzít libovolnou posloupnost formálních kontextů $I_i \subseteq X \times Y \, (i \in \mathbb{Z})$ a položíme $M_x = \{y^i \,|\, \langle x, y\rangle \in I_i\}$. Pak $M_x \models A \Rightarrow B$ má přesně zamýšlený význam, tedy „pro všechny časy t, pokud objekt má všechny atributy z A (v čase t), pak má i všechny atributy z B (v čase t)“. Pak pravdivost $A \Rightarrow B$ v posloupnosti kontextů $I_i \, (i \in \mathbb{Z})$ může být chápána tak, že pro každý objekt $x \in X$ platí $M_x \models A \Rightarrow B$. Například pokud budeme brát posloupnost kontextů z tabulky 2., pak $M_{\text{Praha}} = \{\ldots, \text{déšť}^1, \text{teplo}^1, \text{déšť}^2, \text{zima}^2, \text{zima}^3, \ldots\}$.

Budeme uvažovat následující pojem modelu:

Definice 3.4. Mějme množinu časových implikací Σ, kterou nazýváme *teorie.* Pak *model* teorie Σ je množina $M \subseteq \mathcal{T}_Y$, ve které jsou pravdivé všechny implikace z teorie Σ. Množinu všech modelů budeme označovat $\mathrm{Mod}(\Sigma)$, tedy

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) = \{M \subseteq \mathcal{T}_Y \,|\, \text{pro každou } A \Rightarrow B \in \Sigma \text{ platí } M \models A \Rightarrow B\}.$$

Obecně množina všech modelů dané teorie je nekonečná a můžou existovat i teorie, které nemají žádný konečný model na rozdíl od modelů množin atributových implikací nad konečnou Y, kde modely jsou vždy konečné. Pro příklad můžeme vzít teorii $\{\emptyset \Rightarrow \{y^0\}\}$. Pro množinu všech modelů dále platí, že je uzavřená na libovolné průniky a posunutí.

Definice 3.5. O množině $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{T}_Y}$ řekneme, že je *uzavřená na posuny*, pokud pro každou $M \in \mathcal{S}$ a každý čas i je i $M + i \in \mathcal{S}$.

Věta 3.6. *Pro každou teorii* Σ *platí, že* $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ *je uzavřená na libovolné průniky a posuny.*

Důkaz. Uzavřenost na průniky : Vezměme teorii Σ, množiny $N_j \in \mathrm{Mod}(\Sigma)\,(j \in J)$, a ukážeme, že $\bigcap_{j \in J} N_j \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Vezmeme tedy libovolnou $A \Rightarrow B \in \Sigma$, čas i, budeme předpokládat, že $A + i \subseteq \bigcap_{j \in J} N_j$, a ukážeme, že i $B + i \subseteq \bigcap_{j \in J} N_j$. Jelikož z předpokladu máme, že $A + i \subseteq \bigcap_{j \in J} N_j$, pak nutně musí být $A + i \subseteq N_j$ pro každé $j \in J$. Pak ale z předpokladu, že každá $N_j \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ máme, že i $B + i \subseteq N_j$ pro každé $j \in J$. To ale znamená, že $B + i \subseteq \bigcap_{j \in J} N_j$, a tedy $\bigcap_{j \in J} N_j \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

Uzavřenost na posuny : Vezměme libovolnou množinu $M \subseteq \mathcal{T}_Y$, teorii Σ, čas i a předpokládejme, že $M \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Stačí ukázat, že pro každou $A \Rightarrow B \in \Sigma$ platí $M + i \models A \Rightarrow B$. Vezmeme tedy libovolnou $A \Rightarrow B \in \Sigma$, libovolný čas j a předpokládejme, že $A + j \subseteq M + i$, což z monotonie posunu znamená, že $(A + j) - i \subseteq (M + i) - i$, a pak z asociativity posunu dostaneme $A + (j - i) \subseteq M + (i - i) = M$. Jelikož $j - i$ je také čas, pak z předpokladu $M \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ dostaneme, že $B + (j - i) \subseteq M$, a tedy zase z asociativity a monotonie posunu dostaneme $B + j \subseteq M + i$. To ale už znamená, že $M + i \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, protože jsme brali $A \Rightarrow B \in \Sigma$ libovolně. ☐

Jelikož množina všech modelů je uzavřená na libovolné průniky, pak to znamená, že tvoří uzávěrový systém. K němu pak můžeme uvažovat indukovaný uzávěrový operátor:

Definice 3.6. *Sémantický uzávěr* množiny M podle teorie Σ je zobrazení $[\cdots]_\Sigma : 2^{\mathcal{T}_Y} \to 2^{\mathcal{T}_Y}$ dáno předpisem

$$[M]_\Sigma = \bigcap\{N \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \mid M \subseteq N\}.$$

Věta 3.7. *Sémantický uzávěr je uzávěrový operátor.*

Důkaz. Tvrzení plyne přímo ze vztahu uzávěrových systémů a uzávěrových operátorů. Přesto důkaz rozebereme podrobněji.

1. (extenzivita) $M \subseteq [M]_\Sigma$

   Každá množina v průniku obsahuje M, pak tedy i jejich průnik ji obsahuje.

2. (monotonie) Pokud $A \subseteq B$, pak $[A]_\Sigma \subseteq [B]_\Sigma$.

   Předpokládejme, že $A \subseteq B$. Z věty 3.6. víme, že $[B]_\Sigma$ je model a navíc z extenzivity a předpokladu dostaneme $A \subseteq B \subseteq [B]_\Sigma$. To znamená, že $[B]_\Sigma$ je jedna z množin z průniku v $[A]_\Sigma$, a tedy $[A]_\Sigma \subseteq [B]_\Sigma$.

3. (idempotence) $[[M]_\Sigma]_\Sigma = [M]_\Sigma$

   Stačí ukázat pouze "$\subseteq$", protože druhá inkluze plyne z extenzivity. Ale to je hned vidět, protože $[M]_\Sigma \subseteq [M]_\Sigma$ a $[M]_\Sigma$ je model (věta 3.6.).

$\square$

Sémantický uzávěr $[M]_\Sigma$ je tedy nejmenší možný model teorie Σ, který obsahuje množinu M. Jak už bylo uvedeno, modely mohou být i nekonečné, a tedy i množina $[M]_\Sigma$ může být obecně nekonečná. Navíc platí, že sémantický uzávěr M může být vyjádřen jako sjednocení uzávěrů konečných podmnožin M, což znamená, že množina $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ je algebraickým uzávěrovým systémem.

Věta 3.8. *Pro každou teorii Σ platí*

$$[M]_\Sigma = \bigcup\{[N]_\Sigma \mid N \text{ je konečná podmnožina } M\}.$$

Důkaz. Vezměme množinu $\mathcal{M} = \{N \mid N \text{ je konečná podmnožina } M\}$.

"$\subseteq$": Z definice stačí ukázat, že množina $\bigcup_{N\in\mathcal{M}}[N]_\Sigma$ obsahuje množinu M a je model Σ. Jelikož $\mathcal{M}$ obsahuje všechny konečné podmnožiny M, pak jejich sjednocením musí být množina M. Dále z extenzivity sémantického uzávěru víme, že pro každou $N \in \mathcal{M}$ platí $N \subseteq [N]_\Sigma$, a tedy platí i $\bigcup\mathcal{M} = M \subseteq \bigcup_{N\in\mathcal{M}}[N]_\Sigma$. Nyní vezměme libovolnou $A \Rightarrow B \in \Sigma$ a předpokládejme, že $A + i \subseteq \bigcup_{N\in\mathcal{M}}[N]_\Sigma$. Pak ale jelikož $A+i$ je konečná, musí pro každý $y^j \in A+i$ existovat nějaká $N_{y^j} \in \mathcal{M}$ tak, že $y^j \in [N_{y^j}]_\Sigma$. To ale znamená, že $N_{A+i} = \bigcup_{y^j\in A+i} N_{y^j}$ je taky konečná podmnožina M, tedy $N_{A+i} \in \mathcal{M}$. Navíc z monotonie sémantického uzávěru pro každý $y^j \in A + i$ platí $[N_{y^j}]_\Sigma \subseteq [N_{A+i}]_\Sigma$. Pak ale $A + i \subseteq [N_{A+i}]_\Sigma$, což znamená, že $B + i \subseteq [N_{A+i}]_\Sigma \subseteq \bigcup_{N\in\mathcal{M}}[N]_\Sigma$.

"$\supseteq$": Z extenzivity sémantického uzávěru pro každou $N \subseteq M$ platí $[N]_\Sigma \subseteq [M]_\Sigma$. Tedy i pro každou $N \in \mathcal{M}$, a pak platí i $\bigcup_{N\in\mathcal{M}}[N]_\Sigma \subseteq [M]_\Sigma$. $\square$

Je zajímavé, že ke každému algebraickému uzávěrovému systému lze najit teorii tak, že tento systém je právě množina všech modelů.

Věta 3.9. *Nechť $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{T}_Y}$ je algebraický uzávěrový systém, který je uzavřený na libovolné posuny. Pak existuje teorie Σ tak, že $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.*

Důkaz. Vezměme algebraický uzávěrový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^{\mathcal{T}_Y}$, který je uzavřený na libovolné posuny. $\mathcal{S}$ tedy tvoří uzávěrový systém a to znamená, že k němu existuje indukovaný uzávěrový operátor $C_\mathcal{S}$ definovaný následovně:

$$C_\mathcal{S}(M) = \bigcap\{N \in \mathcal{S} \mid M \subseteq N\}.$$

Nyní uvažujme teorii

$$\Sigma = \{A \Rightarrow B \mid A \subseteq \mathcal{T}_Y,\ B \subseteq C_\mathcal{S}(A) \text{ a } A, B \text{ jsou konečné}\}$$

a ukážeme, že $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}(\Sigma)$.

"$\subseteq$": Vezmeme libovolnou $M \in \mathcal{S}$, $A \Rightarrow B \in \Sigma$, čas i a předpokládejme, že $A+i \subseteq M$. Nyní ukážeme, že $B+i \subseteq M$. Z předpokladu $A+i \subseteq M$ a monotonie posunu a operátoru $C_\mathcal{S}$ postupně dostaneme, že $A \subseteq M-i$ a $C_\mathcal{S}(A) \subseteq C_\mathcal{S}(M-i)$. Jelikož $M \in \mathcal{S}$, pak z předpokladu uzavřenosti $\mathcal{S}$ na posuny platí i $M-i \in \mathcal{S}$, a tedy $C_\mathcal{S}(M-i) = M-i$. To znamená, že $B \subseteq C_\mathcal{S}(A) \subseteq M-i$, a tedy $B+i \subseteq M$.

"$\supseteq$": Stačí vzít libovolnou $M \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ a ukázat, že $C_\mathcal{S}(M) = M$. Jedna inkluze plyne z extenzivity $C_\mathcal{S}$ a my ukážeme tu druhou. Vezmeme časové implikace $A_j \Rightarrow B_j \in \Sigma\,(j \in J)$ tak, že $A_j \subseteq M$. Jelikož $\mathcal{S}$ je algebraický uzávěrový systém a A_j jsou všechny konečné podmnožiny M, pak $\bigcup_{j\in J} C_\mathcal{S}(A_j) = C_\mathcal{S}(M)$. Dále z definice pro každou A_j jsou v Σ časové implikace $A_j \Rightarrow B_i\,(i \in I)$ tak, že $\bigcup_{i\in I} B_i = C_\mathcal{S}(A_j)$. To ale znamená, že $\bigcup_{j\in J} B_j = \bigcup_{j\in J} C_\mathcal{S}(A_j)$. Pak z toho, že M je model pro $i=0$ dostaneme $\bigcup_{j\in J} B_j = C_\mathcal{S}(M) \subseteq M$. □

Nyní se budeme soustředit na sémantické vyplývání a jeho vlastnosti.

Definice 3.7. Časová implikace $A \Rightarrow B$ *sémanticky plyne* z teorie Σ, psáno $\Sigma \models A \Rightarrow B$, pokud

$$\text{pro každou } M \in \mathrm{Mod}(\Sigma) \text{ platí, že } M \models A \Rightarrow B.$$

Následující věta ospravedlňuje fakt, že časy atributů u časové implikace jsou relativní. Říká, že z $A \Rightarrow B$ sémanticky plynou všechny časové implikace, které vzniknou z $A \Rightarrow B$ posunutím předpokladu i důsledku o stejný čas.

Věta 3.10. *Pro každou časovou implikaci $A \Rightarrow B$ a čas i platí, že*

$$\{A \Rightarrow B\} \models A+i \Rightarrow B+i.$$

Důkaz. Abychom ukázali $\{A \Rightarrow B\} \models A+i \Rightarrow B+i$, je potřeba ukázat, že pro všechny $M \in \mathrm{Mod}(\{A \Rightarrow B\})$ platí $M \models A+i \Rightarrow B+i$. Vezmeme tedy libovolný model $M \in \mathrm{Mod}(\{A \Rightarrow B\})$ tak, že $(A+i)+j \subseteq M$, tedy $A+i \subseteq M-j$. Z věty 3.6. máme $M-j \in \mathrm{Mod}(\{A \Rightarrow B\})$, tedy $B+i \subseteq M-j$, a dále $(B+i)+j \subseteq M$. Ale to už znamená, že $\{A \Rightarrow B\} \models A+i \Rightarrow B+i$. □

Podobně jako u atributových implikací můžeme ověřit, jestli implikace $A \Rightarrow B$ sémanticky plyne z teorie Σ pomocí nejmenšího modelu generovaného množinou A. Ale nejdříve si ukážeme jednu pomocnou větu, která ukazuje, že i sémantický uzávěr má zajímavou vlastnost vzhledem k posunutí.

Věta 3.11. *Buď Σ teorie, a pak pro množinu $A \subseteq \mathcal{T}_Y$ platí*

$$[A+i]_\Sigma = [A]_\Sigma + i.$$

Důkaz. "$\subseteq$": Jelikož $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ je uzavřená na posuny, pak $[A]_\Sigma + i \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, a jelikož $A \subseteq [A]_\Sigma$, pak platí $A + i \subseteq [A]_\Sigma + i$. To ale z definice sémantického uzávěru znamená, že $[A+i]_\Sigma \subseteq [A]_\Sigma + i$.

"$\supseteq$": Jelikož $\mathrm{Mod}(\Sigma)$ je uzavřená na posuny, pak $[A+i]_\Sigma - i \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$, a jelikož $A+i \subseteq [A+i]_\Sigma$, pak platí $A \subseteq [A+i]_\Sigma - i$. To ale z definice sémantického uzávěru znamená, že $[A]_\Sigma \subseteq [A+i]_\Sigma - i$, tedy $[A]_\Sigma + i \subseteq [A+i]_\Sigma$. $\square$

Věta 3.12. *Pro každou teorii Σ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$ je následující ekvivalentní:*

1. $\Sigma \models A \Rightarrow B$
2. $[A]_\Sigma \models A \Rightarrow B$
3. $B \subseteq [A]_\Sigma$

Důkaz. "$1 \Rightarrow 2$": Pokud platí $\Sigma \models A \Rightarrow B$, pak pro každý model M platí $M \models A \Rightarrow B$. To ale znamená, že platí i pro $[A]_\Sigma \in \Sigma$.

"$2 \Rightarrow 3$": Pokud platí $[A]_\Sigma \models A \Rightarrow B$, pak pro čas 0 z toho, že $A = A+0 \subseteq [A]_\Sigma$ dostaneme $B \subseteq [A]_\Sigma$.

"$3 \Rightarrow 1$": Předpokládejme, že platí $B \subseteq [A]_\Sigma$ a vezmeme $M \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$ a čas i, tak že $A + i \subseteq M$. Pak $A \subseteq M - i$, a tedy $[A]_\Sigma \subseteq [M - i]_\Sigma$. Pak spolu s předpokladem a větou 3.11. dostaneme $B \subseteq [M]_\Sigma - i$, a tedy $B + i \subseteq [M]_\Sigma$. To ale už znamená, že $\Sigma \models A \Rightarrow B$. $\square$

4. Axiomatizace

V této kapitole je popsán odvozovací systém časových implikací a pojem syntaktického vyplývání. Syntaktické vyplývání je založeno na rozšíření Armstrongova axiomatického systému [2] o fakt, že časy ve formulích jsou relativní.

$$\text{Pokud } A, B \text{ jsou konečné, odvoď } A \cup B \Rightarrow A. \tag{Ax}$$
$$\text{Z } A \Rightarrow B \text{ a } B \cup C \Rightarrow D \text{ odvoď } A \cup C \Rightarrow D. \tag{Cut}$$
$$\text{Pro čas } i \text{ z } A \Rightarrow B \text{ odvoď } A + i \Rightarrow B + i. \tag{Shf}$$

Pravidlo (Shf), které je oproti Armstrongovu systému navíc, budeme nazývat pravidlo *časového posunu*. Dále standardně definujeme pojem důkazu a syntaktického vyplývání neboli dokazatelnosti.

Definice 4.1. *Důkaz* z teorie Σ je konečná posloupnost časových implikací $\varphi_1, \dots, \varphi_n$, kde každá φ_i

1. je z teorie Σ, nebo

2. vznikla odvozením pomocí (Ax), (Cut) nebo (Shf) z $\varphi_1, \ldots, \varphi_{i-1}$.

Časová implikace $A \Rightarrow B$ *je dokazatelná* z teorie Σ, psáno $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$, pokud existuje důkaz ze Σ tak, že $\varphi_n = A \Rightarrow B$.

Následující tvrzení je známým výsledkem pro dokazatelnost Armstronga systému [13], a jelikož odvozovací systém, který uvažujeme, je rozšířením Armstronga systému, pak pro něj toto tvrzení platí také.

Věta 4.1.

$$\{A \Rightarrow B, A \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow B \cup C, \qquad \textit{(Add)}$$
$$\{B \Rightarrow C\} \vdash A \cup B \Rightarrow A \cup C, \qquad \textit{(Aug)}$$
$$\{A \Rightarrow B \cup C\} \vdash A \Rightarrow B, \qquad \textit{(Pro)}$$
$$\{A \Rightarrow B, B \Rightarrow C\} \vdash A \Rightarrow C. \qquad \textit{(Tra)}$$

Důkaz. (Add):

1	$A \Rightarrow B$	předpoklad z teorie
2	$B \cup C \Rightarrow B \cup C$	(Ax)
3	$A \cup C \Rightarrow B \cup C$	(Cut) z 1 a 2
4	$A \Rightarrow C$	předpoklad z teorie
5	$A \Rightarrow B \cup C$	(Cut) z 3 a 4

(Aug):

1	$B \Rightarrow C$	předpoklad z teorie
2	$A \cup C \Rightarrow A \cup C$	(Ax)
3	$A \cup B \Rightarrow A \cup C$	(Cut) z 1 a 2

(Pro):

1	$A \Rightarrow B \cup C$	předpoklad z teorie
2	$B \cup C \Rightarrow B$	(Ax)
3	$A \Rightarrow B$	(Cut) z 1 a 2

(Tra):

1	$A \Rightarrow B$	předpoklad z teorie
2	$B \Rightarrow C$	předpoklad z teorie
3	$A \Rightarrow C$	(Cut) z 1 a 2

□

Poznámka. Pro zjednodušení můžeme předchozí používat jako odvozovací pravidla, protože v důkazu je můžeme nahradit jejich důkazy, které používají pouze odvozovací pravidla (Ax) a (Cut).

Abychom ukázali, že vše, co je dokazatelné z dané teorie, z ní i sémanticky plyne, je potřeba ukázat, že všechna pravidla jsou *korektní*, tedy pro každé pravidlo "Z $A_1 \Rightarrow B_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_n$ odvoď $C \Rightarrow D$"musí platit $\{A_1 \Rightarrow B_1, \ldots, A_n \Rightarrow B_n\} \models C \Rightarrow D$.

Věta 4.2. *Pro konečné množiny $A, B \subseteq \mathcal{T}_Y$ platí*

$$\emptyset \models A \cup B \Rightarrow A.$$

Důkaz. Vezměme libovolnou $M \in \mathrm{Mod}(\emptyset)$, a jelikož $A \subseteq A \cup B$, pak díky větě 3.4. platí $M \models A \cup B \Rightarrow A$. □

Věta 4.3. *Pro konečné množiny $A, B, C, D \subseteq \mathcal{T}_Y$ platí*

$$\{A \Rightarrow B, B \cup C \Rightarrow D\} \models A \cup C \Rightarrow D.$$

Důkaz. Vezměme libovolnou $M \in \mathrm{Mod}(\{A \Rightarrow B, B \cup C \Rightarrow D\})$, a předpokládejme, že $(A \cup C) + i \subseteq M$. $(A \cup C) + i = \{y^{j+i} \,|\, y^j \in A \text{ nebo } y^j \in C\} = \{y^{j+i} \,|\, y^{j+i} \in A + i \text{ nebo } y^{j+i} \in C + i\} = (A + i) \cup (C + i)$. Jelikož M je model, pak určitě platí i $B + i \subseteq M$, a tedy $(C + i) \cup (B + i) \subseteq M$. Ale pak platí i $D + i \subseteq M$. □

Věta 4.4. (korektnost) *Pro konečnou teorii Σ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$ platí, že*

$$\textit{pokud } \Sigma \vdash A \Rightarrow B, \textit{ pak } \Sigma \models A \Rightarrow B.$$

Důkaz. Důkaz provedeme indukcí přes délku důkazu $A \Rightarrow B$. Předpokládejme, že pro každé $j \leq i-1$ platí $\Sigma \models \varphi_j$. Dále každá formule φ_i z důkazu je buď ze Σ, tedy triviálně platí $\Sigma \models \varphi_i$, a nebo φ_i vznikla z předchozích formulí pomocí pravidla (Ax), (Cut) nebo (Shf). Jelikož všechna pravidla jsou korektní (věty 4.2., 4.3. a 3.10.), pak z předpokladu platí i $\Sigma \models \varphi_i$. □

Pro dokázání úplnosti budeme potřebovat ještě ukázat, že pokud $\Sigma \models A \Rightarrow B$, pak $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$. V následující větě je dokázané obměněné tvrzení.

Věta 4.5. *Mějme konečnou teorii Σ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$.*

$$\textit{Pokud } \Sigma \nvdash A \Rightarrow B, \textit{ pak existuje } M \in Mod(\Sigma) \textit{ tak, že } M \not\models A \Rightarrow B.$$

Důkaz. Vezměme konečnou Σ a předpokládejme, že $\Sigma \nvdash A \Rightarrow B$. Pak pro každé nezáporné celé číslo n položíme

$$\begin{aligned} A_\Sigma^0 &= A, \\ A_\Sigma^{n+1} &= A_\Sigma^n \cup \bigcup \{F + i \,|\, E \Rightarrow F \in \Sigma \text{ a } E + i \subseteq A_\Sigma^n\}, \\ A_\Sigma^\omega &= \textstyle\bigcup_{n=0}^\infty A_\Sigma^n. \end{aligned}$$

Nyní stačí ukázat, že A_Σ^ω je hledaný model M. Vezměme $E \Rightarrow F \in \Sigma$ a čas i tak, že $E + i \subseteq A_\Sigma^\omega$. Jelikož $E + i$ je konečná množina, pak musí existovat n tak, že $E + i \subseteq A_\Sigma^n$, a tedy z definice platí $F + i \subseteq A_\Sigma^{n+1} \subseteq A_\Sigma^\omega$, což znamená, že $A_\Sigma^\omega \in \mathrm{Mod}(\Sigma)$. Dále dokážeme, že pokud $B \subseteq A_\Sigma^\omega$, pak $\Sigma \vdash A \Rightarrow B$. K tomu nám stačí ukázat, že pro každé n a každou konečnou $D \subseteq A_\Sigma^n$ platí $\Sigma \vdash A \Rightarrow D$, protože pak stačí jen vzít $D = B$. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n a pro všechny konečné podmnožiny A_Σ^n. Nyní vezměme $n+1$, konečnou $D \subseteq A_\Sigma^{n+1}$ a konečnou

$$D' = \{\langle E \Rightarrow F, i\rangle \mid E \Rightarrow F \in \Sigma \text{ a } E + i \subseteq A_\Sigma^n\}$$

takovou, že $D \subseteq \bigcup\{F + i \mid \langle E \Rightarrow F, i\rangle \in D'\} \cup A_\Sigma^n$. Z indukčního předpokladu pro každou $\langle E \Rightarrow F, i\rangle \in D'$ máme $\Sigma \vdash A \Rightarrow E + i$, protože $E + i \subseteq A_\Sigma^n$. Pak důkaz $A \Rightarrow E + i$ prodloužíme o

1	$A \Rightarrow E + i$	poslední formule z důkazu
2	$E \Rightarrow F$	předpoklad z teorie
3	$E + i \Rightarrow F + i$	(Shf) z 2
4	$A \Rightarrow F + i$	(Tra) z 1 a 3

a máme důkaz $A \Rightarrow F + i$, tedy $\Sigma \vdash A \Rightarrow F + i$. A jelikož D a D' jsou konečné, pak $\Sigma \vdash A \Rightarrow D$ dostaneme použitím indukčního předpokladu a konečně mnoha aplikacemi (Add). Pak z našeho počátečního předpokladu $\Sigma \nvdash A \Rightarrow B$ dostaneme $B \not\subseteq A_\Sigma^\omega$. Dále pro $i = 0$ máme $A + i = A \subseteq A_\Sigma^\omega$, ale tedy $B + i = B \not\subseteq A_\Sigma^\omega$, což znamená, že $\Sigma \nvDash A \Rightarrow B$. □

Korektnost a předchozí věta už dohromady dávají větu o úplnosti.

Věta 4.6. (úplnost) *Pro každou konečnou teorii Σ a časovou implikaci $A \Rightarrow B$ platí, že*

$$\Sigma \vDash A \Rightarrow B \text{ právě, když } \Sigma \vdash A \Rightarrow B.$$

Důkaz. Věta je důsledkem korektnosti a předchozí věty. □

Na množinu A_Σ^ω, která byla uvedena v důkazu věty 4.5., se můžeme dívat jako na konstruktivní popis $[A]_\Sigma$, protože tyto množiny jsou stejné.

Důsledek 4.1. *Pro každou konečnou $A \subseteq \mathcal{T}_Y$ a konečnou teorii Σ platí, že*

$$[A]_\Sigma = A_\Sigma^\omega.$$

Důkaz. "$\subseteq$": Z důkazu věty 4.5. je vidět, že A_Σ^ω je model obsahující A, tedy $[A]_\Sigma \subseteq A_\Sigma^\omega$.

"$\supseteq$": Z důkazu věty 4.5. je také vidět, že pro každou konečnou $D \subseteq A_\Sigma^\omega$ platí $\Sigma \vdash A \Rightarrow D$. Tedy z úplnosti máme $\Sigma \vDash A \Rightarrow D$ a z věty 3.12., pak dostaneme, že $D \subseteq [A]_\Sigma$. Jelikož to platí pro každou konečnou podmnožinu, pak to platí i pro jejich sjednocení, a tedy $A_\Sigma^\omega \subseteq [A]_\Sigma$. □

Poznámka. Nakonec poznamenejme, že pojmy sémantického a syntaktického vyplývání jsou vskutku jiné než u klasické FCA. Můžeme uvažovat množinu atributů $\mathcal{T}_Y$, a pak každá časová implikace bude také atributovou implikací. Pak k sémantickému vyplývání z definice 3.7. můžeme uvažovat klasické sémantické vyplývání, kde nebudeme brát v úvahu speciální roli časů. To samé aplikujeme na dokazatelnost, tedy klasický pojem dostaneme vynecháním pravidla (Shf). Pak například z $\Sigma = \{\{a^{-1}\} \Rightarrow \{b^1\}, \{b^3\} \Rightarrow \{c^1\}\}$ lze dokázat $\{a^1\} \Rightarrow \{b^3\}$ pomocí (Shf), a pak $\{a^1\} \Rightarrow \{c^1\}$ pomocí (Tra). Na druhé straně ale ze Σ nelze dokázat $\{a^1\} \Rightarrow \{c^1\}$ bez (Shf).

5. Vztah k ostatním formalismům

Tato kapitola se zabývá vztahem formulí, pravdivosti a sémantického vyplývání z kapitoly 3. k výrokové temporální logice [3, 4] a k triadické FCA [10].

U atributových implikací jsme říkali, že můžou být chápány jako formule výrokové logiky. Časové implikace pak můžou být chápány jako formule temporální výrokové logiky a podmnožiny $\mathcal{T}_Y$ jako Kripkeho modely výrokového jazyka, který obsahuje atributy z Y jako výrokové symboly. Konkrétně pro $M \subseteq \mathcal{T}_Y$ můžeme uvažovat $\mathbf{K}_M = \langle W, e, r \rangle$, kde množina světů $W = \mathbb{Z}$, relace dosažitelnosti $r \subseteq W \times W$ je definována jako $\langle w, w+1 \rangle \in r$ pro každý $w \in \mathbb{Z}$ a $e(w, y) = 1$, pokud $y^w \in M$ jinak $e(w, y) = 0$. Pro vyjádření vztahů mezi časy z časových implikací zavedeme modality G, jehož význam je „v následujícím světě“, a H, jehož význam je „v předchozím světě“. Pak reprezentujeme časovou implikaci tedy formuli ve tvaru (1) jako

$$(\triangle^{i_1} y_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \triangle^{i_n} y_n) \Rightarrow (\triangle^{j_1} z_1 \mathbin{\&} \cdots \mathbin{\&} \triangle^{j_m} z_m), \tag{4}$$

kde & je konjunkce a

$$\triangle^i y = \begin{cases} y, & \text{if } i = 0, \\ G\triangle^{i-1} y, & \text{if } i > 0, \\ H\triangle^{i+1} y, & \text{if } i < 0. \end{cases}$$

Pak s touto notací je (1) pravdivá v M právě, když příslušná formule ve tvaru (4) je pravdivá v $\mathbf{K}_M$ ve všech světech $w \in W$, kde hodnota $G\varphi$ v $\mathbf{K}$ a w je daná hodnotou φ v $\mathbf{K}$ a w' tak, že $\langle w, w' \rangle \in r$ (a analogicky pro H). Tedy až na různou formalizaci interpretace časových implikací může být chápána jako interpretace určitých modálních formulí v Kripkeho modelech.

Nakonec se podíváme na časové implikace a pravdivost v kontextu triadické FCA. Jak bylo psáno v úvodu, tak posloupnost formálních kontextů $I_i \subseteq X \times Y$ $(i \in \mathbb{Z})$ by mohla být chápána jako triadický formální kontext. Konkrétně pro triadický formální koncept $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I \rangle$ máme $\langle x, y, j \rangle \in I$ právě, když $\langle x, y \rangle \in I_j$. Časová implikace pak může být interpretována v tomto triadickém kontextu:

Definice 5.1. Formule $A \Rightarrow B$ je pravdivá v triadickém kontextu $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I\rangle$, psáno $\mathbf{T} \models A \Rightarrow B$, pokud pro každý $x \in X$ a $M_x = \{y^i \mid \langle x, y, i\rangle \in I\}$ platí $M_x \models A \Rightarrow B$.

Klasický výsledek u atributových implikací říká, že atributová implikace je pravdivá ve formálním kontextu právě, když je pravdivá ve všech jeho intentech. Navíc $A \Rightarrow B$ je pravdivá v triadickém kontextu pokud množina B je podmnožinou intentu generovaného množinou A. V našem případě můžeme prokázat podobnou charakterizaci.

Pro daný $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I\rangle$ definujeme operátory ${}^{\uparrow} : 2^{\mathcal{T}_X} \to 2^{\mathcal{T}_Y}$ a ${}^{\downarrow} : 2^{\mathcal{T}_Y} \to 2^{\mathcal{T}_X}$ následovně: Pro každou $A \subseteq \mathcal{T}_X$ (definovaná jako (2), kde X nahradíme za Y) a $B \subseteq \mathcal{T}_X$ máme

$$A^{\uparrow} = \{y^j \in \mathcal{T}_Y \mid \langle x, y, i+j\rangle \in I \text{ for all } x^i \in A\},$$
$$B^{\downarrow} = \{x^i \in \mathcal{T}_X \mid \langle x, y, i+j\rangle \in I \text{ for all } y^j \in B\}.$$

Dvojce operátorů ${}^{\uparrow}$ a ${}^{\downarrow}$ tvoří antitonní Galoisovu konexi, tedy pro množiny $A \subseteq \mathcal{T}_X$ a $B \subseteq \mathcal{T}_Y$ platí $A \subseteq B^{\downarrow}$ právě, když $B \subseteq A^{\uparrow}$. Pak složený operátor ${}^{\downarrow\uparrow} : 2^{\mathcal{T}_Y} \to 2^{\mathcal{T}_Y}$ je uzávěrový operátor.

Věta 5.1. *Pro každý triadický kontext $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I\rangle$ a formuli $A \Rightarrow B$ je následující ekvivalentní:*

1. $\mathbf{T} \models A \Rightarrow B$,
2. $A^{\downarrow} \subseteq B^{\downarrow}$,
3. $B \subseteq A^{\downarrow\uparrow}$.

Důkaz. $\mathbf{T} \models A \Rightarrow B$ platí právě, když pro každý $x \in X$ platí $M_x \models A \Rightarrow B$. Dále $A + i \subseteq M_x$ platí právě, když pro každý $y^j \in A$ platí $\langle x, y, j+i\rangle \in I$, což je právě, když $x^i \in A^{\downarrow}$. Stejné pozorování můžeme udělat pro B, a tedy pro každý $x \in X$ platí $M_x \models A \Rightarrow B$ právě, když $A^{\downarrow} \subseteq B^{\downarrow}$. 1 je tedy ekvivalentní s 2. Ekvivalence 2 a 3 plyne hned z vlastnosti Galoisovy konexe $\langle {}^{\downarrow}, {}^{\uparrow}\rangle$. ☐

Na základě věty 5.1. můžeme ukázat analogii k výsledku o pravdivosti atributových implikací v kontextech jako implikace splněné intenty všech konceptů. K tomu ale ještě budeme potřebovat následující tvrzení o vztahu operátorů ${}^{\uparrow}, {}^{\downarrow}$ k posunutí.

Lemma 5.1. *Pro množinu $B \subseteq \mathcal{T}_Y$ a čas k platí*

$$(B + k)^{\downarrow} = B^{\downarrow} - k.$$

Dále platí i duální tvrzení pro ${}^{\uparrow}$.

Důkaz. Vezměme libovolnou $B \subseteq \mathcal{T}_Y$ a čas k. Pak

$$(B+k)^{\downarrow} = \{x^i \in \mathcal{T}_X \mid \langle x, y, i+j \rangle \in I \text{ pro každý } y^j \in B+k\}.$$

Pokud položime $j' = j - k$, pak dostaneme

$$(B+k)^{\downarrow} = \{x^i \in \mathcal{T}_X \mid \langle x, y, i+j'+k \rangle \in I \text{ pro každý } y^{j'} \in B\}$$

Navíc pokud položíme $i' = i + k$, dostaneme

$$\begin{aligned}(B+k)^{\downarrow} &= \{x^{i'-k} \in \mathcal{T}_X \mid \langle x, y, i'+j' \rangle \in I \text{ pro každý } y^{j'} \in B\} \\ &= \{x^{i'} \in \mathcal{T}_X \mid \langle x, y, i'+j' \rangle \in I \text{ pro každý } y^{j'} \in B\} - k = B^{\downarrow} - k.\end{aligned}$$

Pro $^{\uparrow}$ by se tvrzení ukázalo stejně. □

Věta 5.2. *Pro každý triadický kontext* $\mathbf{T} = \langle X, Y, \mathbb{Z}, I \rangle$ *a formuli* $A \Rightarrow B$ *platí, že*

$$\mathbf{T} \models A \Rightarrow B \text{ právě, když } M^{\downarrow\uparrow} \models A \Rightarrow B \text{ pro každou } M \subseteq \mathcal{T}_Y.$$

Důkaz. $\Leftarrow$ plyne z věty 5.1. pro $M = A$ a $i = 0$. K prokázání druhé strany předpokládejme, že $\mathbf{T} \models A \Rightarrow B$ a $A + i \subseteq M^{\downarrow\uparrow}$. Pak z vlastnosti Galoisovy konexe a předchozí lemmy máme $M^{\downarrow} \subseteq (A+i)^{\downarrow} = A^{\downarrow} - i$. Pak z předpokladu, věty 5.1. a monotonie posunu dostaneme $M^{\downarrow} \subseteq A^{\downarrow} - i \subseteq B^{\downarrow} - i = (B+i)^{\downarrow}$, a tedy $B + i \subseteq M^{\downarrow\uparrow}$. □

Závěr

V této práci jsme představili časové implikace a jejich význam na základě vyhodnocování v modelech pomocí posunu do konkrétních časů. Formule jsou pravdivé, pokud jsou zachovány ve všech časech. Definovali jsme sémantické vyplývání, ukázali uzávěrové vlastnosti systémů modelů a poskytli charakterizaci na základě nejmenších modelů. Navíc jsme ukázali axiomatizaci, která rozšiřuje klasickou axiomatizaci o dodatečné pravidlo časového posunu.

Původně časové implikace obsahovaly pouze konečné množiny atributů v časech, které jsou záporné nebo se rovnají nule a pravdivost časové implikace $A \Rightarrow B$ v M jsme definovali v určitém rozsahu časů. Podmínka (3.3.) nemusela platit pro všechny časy, ale pouze pro časy i takové, že množiny $A + i$ a $B + i$ obsahují pouze atributy v časech, které jsou v rámci daného rozsahu. Díky zavedení časového rozsahu u pravdivosti se můžeme u sémantického vyplývání omezit pouze na modely, které obsahují pouze atributy v časech, které jsou v daném rozsahu. Sémantický uzávěr je tedy vždy konečný. Dále jsme pracovali pouze s implikacemi, jejichž důsledek obsahuje aspoň jeden atribut v čase, který je větší nebo roven než všechny časy atributů z předpokladu a zároveň předpoklad obsahuje aspoň jeden atribut v čase, který je menší nebo roven než všechny časy atributů z důsledku. Sémantické vyplývání časové implikace $A \Rightarrow B$ z množiny těchto implikací pak lze charakterizovat pomocí nejmenšího modelu generovaného množinou A. Navíc pokud bereme pouze tyto časové implikace, pak oproti obecným časovým implikacím je odvozovací pravidlo (Cut) korektní. Navrhli jsme algoritmus pro výpočet sémantického uzávěru, který je rozšířením známého algoritmu LinClosure [13]. Tato formalizace zabrala hodně času, ale naneštěstí se ukázalo, že axiomatizace, která byla stejná jako ta, která je uvedena v kapitole 4., není úplná vzhledem k sémantickému vyplývání. Po různých úpravách jsme se nakonec rozhodli zrušit omezení na časy a tato verze formalizace je popsána v této práci. Jak jsme ukázali, tak nyní už platí věta o úplnosti, ale bohužel sémantický uzávěr může být nekonečná množina. Množina A_{Σ}^{ω}, která je uvedena v důkazu věty 4.5. slouží jako formální základ pro algoritmus na zjištění, jestli časová implikace sémanticky plyne z dané teorie (věta 3.12.). V práci algoritmus uveden není, protože zatím není jasné, jak by měl výpočet vypadat, aby se nemusel počítat celý uzávěr. Dalším předmětem bádání pak bude také popis neredundantní množiny časových implikací, která je úplná v datech.

Conclusions

In this work we introduced time implications and their semantics based on evaluating in models using the shift to concrete time points. The formulas are true if they are preserved in all time points. We defined semantic entailment, showed closure properties of systems of models, and provided a characterization based on least models. Furthermore we showed axiomatization which extends classic axiomatization by an additional rule of the time shift.

Originally time implications contained only finite sets of attributes in time points which are negative or equal to zero and we defined the truth of time implication $A \Rightarrow B$ in M in particular time scope. Condition (3.3.) didn't have to be satisfied for all times but only for times i such that sets $A + i$ and $B + i$ contains only attributes in times which are within the current scope. Thanks to the introduction of time scope in truth and also in semantic entailment, we can limit models only to models which contain only attributes in times which are within the current scope. Semantic closure is then always finite. Next we worked only with implications such that their consequent contains at least one attribute in time which is greater or equal than all times of attributes in antecedent and their antecedent contains at least one attribute in time which is less or equal than all times of attribute in consequent. Semantic entailment of time implication $A \Rightarrow B$ from sets of implications of this type can be then characterized by the least model generated by the set A. Moreover when we consider only this time implications, the inference rule (Cut) is sound in contrast with general time implications. We designed an algorithm for computing the semantic closure which is an extension of known algorithm LinClosure [13]. This formalization took lot of time but unfortunately we discovered that the axiomatization which was similar to the axiomatization in section 4. is not complete with respect to semantic entailment. After some modifications we decided to remove the limitation on time point and this version of formalization is described in this work. As we showed, the completness theorem now holds but unfortunately the semantic closure can be an infinite set. The set A_{Σ}^{ω} which is stated in theorem 4.5. is used as a formal basis for algorithm on indicating whether a particular theory semantically entails a time implication (theorem 3.12.). The algorithm is not included in this work because it is not clear yet how should the computation look like to not compute the whole semantic closure. Future research will focus on description of non-redundant set of time implications which is complete in data.

Reference

[1] Agrawal R., Imielinski T., Swami A.: Mining association rules between sets of items in large databases. *In Proc. of the ACM SIGMOD Intl. Conf. on Management of Data* (1993), pp. 207–216.

[2] Armstrong W.W.: Dependency structures of data base relationships. In: Rosenfeld, J.L., Freeman, H. (eds.) *Information Processing 74: Proceedings of IFIP Congress.*, North Holland, Amsterdam (1974), pp. 580–583.

[3] Gabbay D.M.: Model theory for tense logics. *Annals of Mathematical Logic 8*(1-2), 185–236 (1975)

[4] Gabbay D.M.: Tense systems with discrete moments of time, *part I. Journal of Philisophiical Logic 1*(1), 35–44 (1972)

[5] Feng L., Dillon T., Liu J. Inter-transactional association rules for multi-dimensional contexts for prediction and their application to studying meteorological data. *Data and Knowledge Engineering*, 37 (2001), pp. 85–115.

[6] Ganter B., Obiedkov S.: Implications in triadic formal contexts. In: Wolff K.E., Pfeiffer H.D., Delugach H.S. (eds.) *Conceptual Structures at Work, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 3127, pp. 186–195. Springer Berlin Heidelberg (2004)

[7] Ganter B., Wille R.: *Formal Concept Analysis: Mathematical Foundations.* Springer, Berlin, 1999.

[8] Guigues J.L., Duquenne V.: Familles minimales d'implications informatives resultant d'un tableau de données binaires. *Math. Sci. Humaines* 95 (1986), pp. 5–18.

[9] Huang Y.P., Kao L.J., Sandnes F.E.: Efficient mining of salinity and temperature association rules from ARGO data. *Expert Systems with Applications* 35 (2008), pp. 59–68.

[10] Lehmann F., Wille R.: A triadic approach to formal concept analysis. In: Ellis G., Levinson R., Rich W., Sowa J.F. (eds.) *Conceptual Structures: Applications, Implementation and Theory, Lecture Notes in Computer Science*, vol. 954, pp. 32–43. Springer Berlin Heidelberg (1995)

[11] Liu J., Feng L., Han J.: Beyond Intra-Transaction Association Analysis: Mining Multi-Dimensional Inter-Transaction Association Rules. *ACM Transactions on Information Systems*, 18 (2000), pp. 423–454.

[12] Lu H., Han J., Feng L.: (1998) Stock Movement Prediction And N-Dimensional Inter-Transaction Association Rules. *In Proc. of the ACM SIGMOD Workshop on Research Issues on Data Mining and Knowledge Discovery* (1998), pp. 12:1–12:7.

[13] Maier D.: *Theory of Relational Databases.* Computer Science Press, Rockville, MD, USA, 1983.

[14] Tung K.H., Lu H., Han J., Feng L.: Breaking the barrier of transactions: Mining inter-transaction association rules. *In Proc. ACM SIGKDD Intl. Conf. Knowledge Discovery and Data Mining* (1999), pp. 297–301.